Metoder og basal videnskabsteori i matematik

Jens Christian Larsen, lektor i matematik og filosofi ved Sorø Akademis Skole, eksamineret matematikvejleder og
Kasper Bjering Søby Jensen, lektor i matematik og fysik ved Roskilde Katedralskole, ph.d. i matematikkens didaktik

I læreplanen for det ny Studieretningsprojekt indgår det faglige mål: *"gøre sig metodiske og basale videnskabsteoretiske overvejelser i forbindelse med behandling af en kompleks faglig problemstilling."*

I tillæg hedder det i læreplanen for matematik på alle tre niveauer, at det supplerende stof skal omfatte *"inddragelse af videnskabsteori og matematiske metoder"*.

Der er altså god grund til at stille skarpt på, hvilket indhold vi som matematikfag skal lægge i snakken om i første række metoder og i anden række (basal) videnskabsteori. I forbindelse med et større skriv, vi er blevet bedt om at lave, har vi gjort os en række tanker om disse to ting, som vi vil præsentere i kondenseret form i denne artikel.

Kombinationen af læreplanerne lægger ret klart op til, at arbejdet med metoder og (basal) videnskabsteori ikke kan afgrænses til det endelige SRP–arbejde, men tværtimod er en bevidst indarbejdet læringsaktivitet i det samlede matematikforløb med mere eller mindre tydeliggjorte nedslag i langt de fleste konkrete undervisningsforløb.

Samtidig er det vigtigt, at vi har et klart *fagligt* fokus på dette arbejde. De værste sider af det gamle Almen Studieforberedelse (AT) var den overfladiske metafaglighed uden forbindelse til konkret faglighed.

For os er en metode derfor kendetegnet ved at være en beskrivelse af, hvad der er gjort konkret fagligt, snarer end en overfladisk etiket. De begreber, vi opstiller til at beskrive metoder, kan således ikke anvendes i bestemt ental. Man kan fx ikke tale om "at have brugt *den* deduktive metode". Derimod kan en konkret anvendt metode siges at være deduktiv.

Den basale videnskabsteori er endvidere knyttet til metoderne og kan forstås som *refleksion over metoder*. Dermed adskiller *basal videnskabsteori* sig fra fagets almindelige *videnskabsteori*, som adresserer mere principielle spørgsmål om fagets genstande og erkendelser. Sidstnævnte er altså ikke på dagsordenen i SRP–læreplanen, men kan godt være det i matematikfagets læreplan.

Om matematikkens tre roller

Overordnet skelner vi mellem tre roller, som matematikken kan spille i et *studieretningsprojekt*: Der kan arbejdes *i* matematik, *med* matematik og *om* matematik. De tre roller er ikke gensidigt udelukkende. Tværtimod vil faget ofte spille to eller tre af rollerne i en konkret SRP.

Når vi taler om at arbejde *i matematik*, taler vi om at arbejde internt i faget. Om arbejdet med at undersøge fagets egne objekter. Det vi nogle gange kalder *ren matematik*. Når vi arbejder *i matematik*, vil vi tale om at anvende matematikkens metoder til at opnå viden om matematikkens genstande.

Når vi taler om at arbejde *med matematik*, taler vi om at anvende faget som værktøj i andre fag (eller aktivitetsfelter). Det er det, vi ofte kalder for *anvendt matematik*. Når vi arbejder *med matematik* vil vi altså opfatte matematikken som en metode, der anvendes til at opnå viden om et andet fags genstande.

Når vi taler om at arbejde *om matematik*, taler vi om at studere matematikken som en genstand. Det er det vi ofte kalder for *meta–matematik*. Når vi arbejder *om matematik* vil vi altså opfatte matematikken som en genstand, der undersøges med metoder hentet fra et andet fag.

Det vil almindeligvis være svært at arbejde *med matematik*, uden at der også arbejdes *i matematik*. Og det er svært at arbejde *om matematik*, uden at der arbejdes *i matematik* og eventuelt også *med matematik*. Vi kan derimod godt forestille os en SRP, der arbejder rent *i matematik*, fx i den nye lettere tilgængelige mulighed for at skrive enkeltfagligt.

Opdelingen i de tre roller er vigtig, fordi de anvendte metoder er væsensforskellige, når faget befinder sig i hver af rollerne.

Metoder til arbejde *i matematik*

Ofte kan man læse i tekster om matematikkens metoder, at matematik benytter *aksiomatisk–deduktive metoder*. Dette er korrekt, men langt fra dækkende. Hvis man faktisk ønsker at beskrive det der gøres, når der arbejdes *i* matematik, må vi have mere nuancerende begreber. Vi giver her vores bud på en liste over sådanne begreber.

- *Notation*. Det symbolsprog vi anvender i matematikken er i sig selv et særligt metodisk greb. At indføre og anvende symbolsproget korrekt er i mange sammenhænge en første betingelse for at kunne tilgå matematiske objekter.

- *Begrebsafklaring*. Matematiske objekter kan kun undersøges, hvis de afgrænses meget præcist. Det kræver indføring af ekstremt præcise begreber. En særlig delmængde af disse er *definitioner* på de objekter, som vi undersøger i faget.

- *Teorifremstilling*. Matematikkens teorier er opbygget som systemer af *sætninger*. At forstå betydningen af sætninger og kunne fremstille systemer af sætninger som en samlet teori om et bestemt afgrænset matematisk felt, er helt centralt for meget matematisk arbejde. I denne fremstilling behøver beviserne for teorien ikke at indgå.

- *Problemløsning – analytisk, numerisk, grafisk*. I arbejdet med at undersøge matematiske objekter stødes på mange konkrete problemer som må løses. Det kan være løsning af en ligning, differentiering af en funktion, bestemmelse af et volumen eller noget fjerde. I dette arbejde vil vi skelne mellem mindst tre metodetyper: *Analytiske* metoder hvor problemer løses ved omskrivninger og udledninger. *Numeriske* metoder hvor problemer løses ved serier af beregninger (som kan laves ad hoc eller efter særlige systemer som eksempelvis Newtons eller Eulers metode). *Grafiske* metoder hvor problemet tilgås ved konstruktion af en visuel figur (funktionsgraf, geometrisk figur, osv.). Hver af disse metoder har styrker og svagheder, som en reflekteret elev kan diskutere når de anvendes.

- *Ræsonnement*. Det matematiske ræsonnement er en særlig kæde af argumenter, hvor der typisk sluttes efter skemaet "hvis… så…". Eksempelvis: "Da $f'(x)$ er positiv for $x \in \,]a; b[$, så er $f(x)$ voksende for $x \in \,]a; b[$". Ræsonnementer trækker typisk på matematisk teori, analytiske omskrivninger, mv. Det er vigtigt her at understrege, at ræsonnementet ikke afgrænser sig til det matematiske bevis.

- *Beviser*. En særlig vigtig delmængde af ræsonnementer er beviser. Beviserne er de ræsonnementer som gør, at vi kan betragte den matematiske teori som værende gældende. Vi er altså her nede i fagets kernemetode, hvor de teoretiske udsagn dokumenteres. Vi skelner mellem forskellige typer af beviser, fx *direkte bevis*, *modeksempel*, *kontraposition*, *modstrid*, *induktion*, mv. En reflekteret elev kan anvende disse bevistyper som eksempler på forskellige metoder.

- *Eksempler*. Ofte benytter vi i matematik det at konstruere eksempler som en metode til at fremstille, uddybe og begrunde notation, definitioner, teori, ræsonnement, mv. Det velvalgte og velkonstruerede eksempel er således en del af den måde vi, arbejder på, og vil for gymnasieeleven ofte være en metode til at vise forståelse af den behandlede matematik.

- *Eksperimenter*. Med de elektroniske hjælpemidler har vi fået et nyt værktøj til at undersøge matematiske objekter og formodninger. På kort tid kan store mængder af beregninger gennemføres, og dermed kan mange indsigter som tidligere var svære at opnå, frembringes via serier af eksempler. Ofte benyttes eksempelvis "skydere" til at undersøge betydning af parametre. Og simuleringer kan bruges til at afprøve stokastiske systemer.

Det kan bemærkes at den klassiske metode til arbejde med matematisk teori bygget op om *Definition*, *Sætning* og *Bevis* (*DSB*) er indeholdt i ovenstående (begrebsafklaring, teorifremstilling og beviser) og står som et meget centralt aspekt af fagets metode. Men også at det alene slet ikke er dækkende for, hvad vi faktisk foretager os, når vi arbejder matematikfagligt.

Om ovenstående liste er den bedste og mest meningsfulde liste over *metoder til arbejde i matematik* kan diskuteres højt og længe. Der kan være noget der mangler, uhensigtsmæssige overlap, noget der konflikter med visse forståelser af "metode", osv.

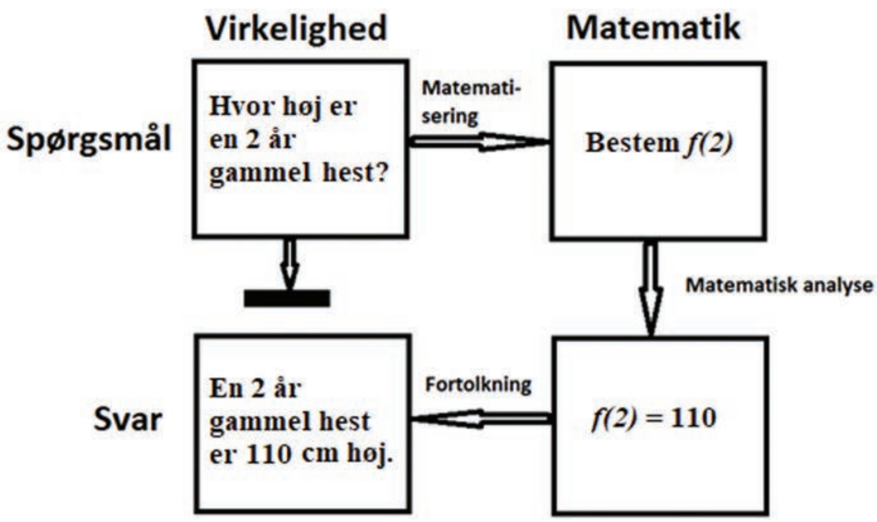
Vores pointe er ikke, at vi har løst problemet, men derimod, at en brugbar liste over metoder til arbejde i matematik må have samme karakter som ovenstående. Vi kan ikke nøjes med at sige "aksiomatisk–deduktiv" og dermed mene, at vi har dækket ind hvordan der arbejdes i matematik – for den arbejdende matematiker gør rigtig meget andet end det.

Metoder til arbejde *med matematik*

Når vi arbejder med anvendelse af matematik i andre fag er det helt centrale begreb *matematisk model*. En matematisk model defineres i litteraturen ofte som en triple (S, M, R), hvor S er et udsnit af "virkeligheden", M er en matematisk struktur og R er en relation som forbinder objekter og relationer i S med objekter og relationer i M.

I en matematisk model oversætter vi ved en *matematisering* spørgsmål fra virkeligheden til spørgsmål i matematikken. Herefter kan vi ved en *matematisk analyse* (dvs. ved arbejde *i matematik*) finde et matematisk svar, som ved en *fortolkning* kan oversættes tilbage til et *virkeligt svar*. Processen er illustreret på figuren nedenfor.

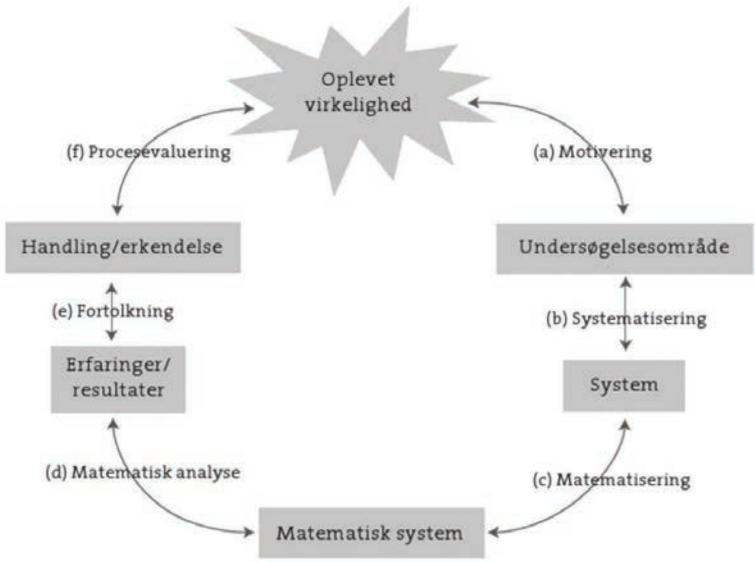
Den reflekterede elev kan sætte ord på denne proces. En refleksionsevne der bør trænes i det daglige arbejde med skriftlige opgaver om modeller, hvor processen ofte gennemløbes og bør være synlig i den skriftlige fremstilling.



Matematik

Den model der arbejdes med kan groft sagt komme to steder fra. Man kan have bygget den selv, eller man kan have overtaget den fra andre. I førstnævnte tilfælde vil vi metodisk tale om *modellering*, mens vi i det andet tilfælde kan få brug for *modelanalyse*.

I en *modellering* følges ofte den såkaldte *modelleringscirkel*, som beskriver den samlede proces, hvor en model bliver til, som seks processer, der forbinder seks stadier i en cirkulær bevægelse. Udgangspunktet er den *oplevede virkelighed* i al dens kompleksitet og mangfoldighed, som må koges ned til et velafgrænset *undersøgelsesområde*. Processen kaldes her *motivering*.



Fra undersøgelsesområdet konstruerer vi gennem *systematisering* et *system*. Det vil sige en begrebslig model af undersøgelsesområdet, hvor der er truffet valg som dramatisk reducerer kompleksiteten af det som skal undersøges. Dels ved at udvælge få forventeligt relevante egenskaber, dels ved at pulje objekter sammen til velvalgte grupper.

Det er dette system som via en *matematisering* forbindes med passende *matematiske strukturer* i det, der samlet set kaldes for det *matematiske system*. Det er altså en væsentlig pointe ved en matematisk model, at den beskriver et konstrueret system afspejlende træk ved virkeligheden og ikke virkeligheden direkte.

Fra det matematiske system kan nu indhøstes *resultater og erfaring* via *matematisk analyse*, som kan *fortolkes* tilbage til vores undersøgelsesområde som udgangspunkt for *handling og erkendelse*. På baggrund af dette kan der *procesevalueres* op imod den oplevede virkelighed og om nødvendigt kan modelleringsprocessen gennemløbes igen for at justere modellen.

Hvis vi omvendt har en foreliggende model indhentet fra andre, vil vi som udgangspunkt "starte" i modelleringscirklens "nederste" stadium, det *matematiske system*. Vi kan nu bevæge os "til venstre" i cirklen med henblik på at opnå resultater som kan danne grundlag for en evaluering af modellen. Dette kan vi kalde for en *modelvurdering*.

Omvendt kan vi også bevæge os "til højre" i cirklen og forsøge at *afmatematisere* systemet for at kortlægge det system, der ligger under modellen og her fra de afgrænsninger samt til- og fravalg der er lavet for at komme fra undersøgelsesområdet til systemet, samt den motivering som kan ligge bag udvælgelsen af undersøgelsesområdet fra den oplevede virkelighed.

En sådan bevægelse i modsat retning vil vi kalde for en *modelanalyse*. Den reflekterede elev vil metodisk set forsøge at analysere grundlag og baggrund for den model eleven i øvrigt overtager fra andre.

I forlængelse af modelanalysen kan man også forestille sig eleven hæve sig op over modellen og forholde sig til dens mere principielle rolle i de sammenhænge den indgår. Fx om afgrænsninger og andre valg kan være truffet ud fra særlige hensyn, og om modellen forsøger at spille en rolle den måske ikke kan spille. Et sådan arbejde vil vi metodisk kalde for *modelkritik*.

I analyse og kritik af modeller kan det ofte være godt at skelne mellem *deskriptive modeller,* som forsøger at beskrive virkeligheden som den er, og *præskriptive* modeller, der foreskriver hvad virkeligheden er. Den præskriptive model skaber altså virkeligheden.

Den matematiske model, der i et taxameter koger tid og afstand ned til en pris, er således *præskriptiv*, fordi modellen skaber prisen på taxaturen. Der er ingen pris før modellen har skabt en. En matematisk model over priser på taxature skabt ud fra regression på en række turlængder og priser er derimod *deskriptiv*, fordi den forsøger at beskrive et allerede eksisterende prissystem for taxature.

Metoder til arbejde *om matematik*

Når vi arbejder *om* matematik gør vi som udgangspunkt matematik til genstand for andre fags metoder. Det er således oplagt at spørge om det overhovedet er relevant for "metoder i matematik" at overveje disse situationer.

Det mest typiske eksempel på arbejder *om matematik* er de matematikhistoriske SRP'er, hvor matematikken som historisk objekt undersøges med metoder fra faget historie. Det er ikke alle samspil mellem matematik og historie som er matematikhistoriske, men det gælder for de som studerer matematikkens egen historie. Et projekt hvor en matematisk model undersøger et historisk forløb er fx rollen *med matematik*, hvor matematik anvendes som metode i historiefaget.

Et andet typisk eksempel kan være *formidling* af matematik, hvor typisk danskfaglige metoder bringes i spil i forhold til at skrive en artikel der formidler matematik. Men man kan også forestille sig, at man anvender pædagogiske metoder hentet fra psykologien.

Man kan også forestille sig opgaver, hvor matematik som fag undersøges med *filosofiske* eller *sociologiske* metoder. Fælles for alle disse projekter er, at man bringer det andet fags metoder i spil til at kommenterer på metoder hentet fra arbejdet *i* og *med* matematik.

Ud over de direkte studier af matematik som genstand, kan man også forestille sig projekter, hvor matematikkens rolle analyseres med et andet fags metoder. En SRP om sandsynlighedsregningens historie undersøger således matematikkens egen historie, mens de velkendte Enigma–projekter i højere grad studerer den rolle matematikken spillede for afviklingen af anden verdenskrig.

Matematikkens rolle i fænomener som litteratur, kunst og arkitektur er også velkendte i samspil med især sprogfagene, hvor emnerne kan være matematikkens rolle i Alice i Eventyrland, dens rolle i kunsten (fx det gyldne snit) eller dens rolle i arkitektur (fx kædelinjer).

Hovedsagen her er, at det i SRP–opgaver af denne art kan være særdeles klogt at være opmærksom på den særlige relation, der eksisterer mellem matematikken og samarbejdsfaget. At samarbejdsfagets metoder studerer et stykke matematikfaglighed, det vil sige metoder hentet fra arbejdet *i* eller *med* matematik, som må tilpasses og udvælges til netop denne undersøgelse

Basal videnskabsteori

I matematikkens videnskabsteori adresseres to grundlæggende spørgsmål. For det første karakteren af matematikkens objekter (*matematikkens ontologi*). Er disse virkelige eller tænkte? Er de meningsfulde i sig selv eller kun meningsfulde i relation til hinanden eller til den materielle verden?

For det andet karakteren af den viden og erkendelse som matematikeren opnår ved sit arbejde med sine objekter (*matematikkens epistemologi*). Det kan fx være spørgsmål om hvor vidt matematikkens sætninger er sande, fordi de bygger på sande aksiomer. Eller om matematikkens aksiomer er velvalgte, fordi de gør visse sætninger sande.

Disse to grundspørgsmål vil for de fleste fremstå ret langhårede og med kun meget lille eller slet ingen forbindelse til det at lave rigtigt matematisk arbejde. Derfor opfatter vi det som ganske konstruktivt at man i SRP–læreplanen har sat ordet "basal" foran ordet "videnskabsteori".

Der findes ingen egentlig definition på "basal videnskabsteori", men der udskiller sig efterhånden en forståelse af, at der er tale om en "refleksion over metoder". I den forstand minder begrebet "basal videnskabsteori" lidt om begrebet "metodologi", som refererer til "læren om metoder".

Ofte opbygges refleksionen over de konkrete metoder der anvendes i det faglige arbejde via begrebspar. Det kan fx være begrebsparret "empirisk–analytisk", som beskriver forskellen på om kilden til ens viden er erfaring eller logisk slutning. Det kan også være et begrebspar som "kvantitativ–kvalitativ", hvor der skelnes mellem om de data man arbejder med er sammenlignelige (fx fordi de kan måles eller optælles), eller om de er så mangfoldige i beskrivelsen af de forskellige instanser, at en simpel sammenligning ikke er mulig.

Vi kan også se på et begrebspar som "induktiv–deduktiv", hvor der skelnes mellem at slutte fra konkrete tilfælde til generelle principper eller fra generelle principper til konkrete tilfælde. I matematik kan begge metoder anvendes, idet vi dog ofte vil opfatte det induktive som utilstrækkeligt til at lave rigtige matematiske principper.

Endeligt kan vi bruge begrebsparret "eksperimentel–observationel" til at beskrive forskellige måder at indsamle empiri på. Der skelnes her mellem det kontrollerede eksperiment overfor indhentning fra naturen og andre situationer vi ikke kontrollerer. Vi taler ofte om eksperimenter i matematik, men sjældent om observationer. Måske er der grundlag for en spændende refleksion her.

Der kan helt sikkert opstilles flere begrebspar til at karakterisere metoder med og dermed bidrage til refleksionen over deres karakter, styrker og svagheder samt rækkevidde. Hovedsagen her er at præsentere ideen til hvordan det gøres, men vi påstår ikke at have lavet en udtømmende liste.

Forfatterne til artiklen arbejder for tiden på at færdiggøre en længere tekst på bestilling af fagkonsulenten om emnet. Teksten forventes publiceret gratis via emu.dk i løbet af efteråret 2019. Emnet forventes også behandlet på regionalmøder og FIP–kurser i 2019.