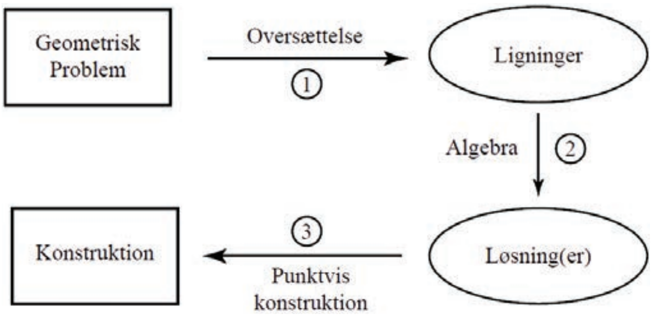
Descartes – broen mellem geometri og algebra

KRISTIAN DANIELSEN OG EMILIE GERTZ, eksterne lektorer, Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet

Introduktion

De fleste, selv elever der begynder i 1.g, kender Pythagoras' sætning: $a^2 + b^2 = c^2$, men selv om sætningen er kendt, er det ikke sikkert, at vi fortolker den på samme måde. Hvad menes der med a^2? Vi kan læse det som et tal, a, der bliver ganget med sig selv, eller som et kvadrat med sidelængden a. Ser vi eksempelvis på Euklids udgave af Pythagoras' sætning, er sætningen formuleret rent geometrisk: *"I en retvinklet trekant er kvadratet på den side der ligger overfor den rette vinkel, lig summen af kvadraterne på de sider der indeslutter den rette vinkel"* (Glunk m.fl., 2006, s. 80). I vore dage er det derimod algebraen, der er det centrale i matematikken. På et eller andet tidspunkt er der således sket et skift fra hovedfokus på geometriske sætninger og deres udfoldelser til overvejende algebraiske formuleringer og betragtninger af matematikken. Leder man efter dette skift i matematikhistorien, støder man naturligt på *René Descartes* (1596 – 1650). Han er af de fleste kendt som filosof, men i matematiksammenhænge er han især kendt for sit værk *La géométrie*. En af de centrale idéer i værket er at oversætte mellem geometriske konstruktionsproblemer og algebraisk ligningsløsning. Altså skabe en bro mellem geometri og algebra. På figur 1 kan man se en illustration af Descartes' idé, der først går ud på at omsætte geometri til ligninger, der kan løses algebraisk, og disse løsninger kan så oversættes tilbage til geometrien og konstrueres.



Figur 1
Illustration af Descartes' oversættelse mellem geometri og algebra. Illustrationen er lavet af Henrik Kragh Sørensen og kan findes i (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 26).

I vejledningen til læreplanen beskrives det som værende svært for elever at overføre viden (skabe "broer") mellem to kontekster ("søjler") fx geometri og algebra. Man skal derfor som underviser indtænke, *"hvordan de enkelte 'søjler' kan knyttes sammen via 'broer', så færdigheder og kompetencer tilegnet i én kontekst bringes i spil i nye kontekster knyttet til en anden 'søjle'."* (Matematik A/B/C, stx – Vejledning, 2018, s. 2). I gymnasieundervisningen kan det netop være interessant at se på Descartes' bro mellem geometrien og algebraen. For det første kan det gøres med en forholdsvis kort og forståelig kilde. For det andet findes der en del materiale på dansk om emnet. Ydermere kan eleverne arbejde eksperimenterende med materialet og komme omkring emner som ensvinklede trekanter, andengradsligninger, symbolmanipulation og repræsentation. Desuden er det en oplagt mulighed for at få inddraget matematikhistorie i undervisningen.

Steno Museets Venner har lige udgivet en oversættelse af første bog af Descartes' *La géométrie*: Karen Thorsen, Henrik Kragh Sørensen og Knud Erik Sørensen (2018): *René Descartes og hans Geometri med en oversættelse af 1. bind*. Steno Museets Venner. Bogen indeholder både en tekstnær filologisk oversættelse, der giver mulighed for at komme tæt på Descartes' tankegang, og en mere bearbejdet oversættelse, der kan hjælpe med forståelsen af teksten vha. noter og matematisk forklaring. Udover oversættelserne har Karen Thorsen skrevet en biografi om Descartes, der giver et billede af manden bag teksten, og Henrik Kragh Sørensen har skrevet en matematikhistorisk indledning, der sætter Descartes' *La géométrie* ind i en historisk og matematisk kontekst. Desuden er det muligt at finde ekstra materialer på hjemmesiden: matematikhistorie.wordpress.com/2018/06/24/descartes.

Der findes ydermere et kort uddrag af *La géométrie* med tilhørende kommentar i (Wolf, 1967, s. 89 – 103). Endvidere har (Brydensholdt og Ebbesen, 2012, s. 69 – 100) en mere matematisk bearbejdning af udvalgte passager fra *La géométrie*.

Forslag til undervisningsforløb

I de følgende afsnit skitseres to undervisningsforløb. Begge forløb har til formål at give eleverne indsigt i den bro, Descartes anvender, når han oversætter mellem geometri og algebra. Det første forløb har fokus på oversættelsen af aritmetiske operationer til geometri, som er velegnet allerede i 1.g. Det andet forløb er en forlængelse af det første og lidt mere avanceret – det centrale i dette forløb er broens anvendelse til løsning af andengradsligningen. Begge forløb følger teksten og indeholder opgaveforslag tiltænkt eleverne samt vejledende kommentarer mere målrettet underviseren.

Vi henviser i forløbene til den filologiske oversættelse. Ved at arbejde med den oversættelse, er det muligt at komme tættere på den originale tankegang og lade eleverne udforske teksten på mere selvstændig vis. Alt efter hvilken klasse man har med at gøre, kan man som lærer tilføje kommentarer og opgaver som hjælp, eller man kan også bruge den mere bearbejdede oversættelse.

Det kan desuden være sjovt ikke kun at lade eleverne have fokus på matematikken, men ligeledes på de steder i teksten, hvor Descartes' personlighed skinner igennem – fx i passagen: *"Men jeg vil ikke bruge tid på at forklare dette mere detaljeret, da jeg ikke vil fratage Dem glæden ved selv at lære det eller nytten ved at dyrke Deres ånd, når De øver dem heri, hvilket efter min mening er det vigtigste, man kan få ud af at dyrke denne videnskab. Også fordi jeg ikke her finder noget, der er så vanskeligt, at de, der er lidt hjemme i den almindelige geometri og i algebraen, og de, der omhyggeligt studerer denne afhandling, ikke kan finde ud af."* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 54) Det kan være, at det minder eleverne om deres egen matematiklærer.

Forløb 1: Aritmetik og geometri

Det første forløb er knyttet til siderne 51 – 53 i (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018). Uddraget er forholdsvist kort og egner sig til, at eleverne selvstændigt kan læse det og arbejde med de følgende opgaver. Det centrale i teksten er Descartes' indførelse af enheden: *"Hvis man har én, som jeg kalder enheden for bedre at kunne sammenholde den med tallene, og som normalt kan være valgt vilkårligt, …"* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018,s. 51). Det er vha. enheden, at det er muligt for Descartes at oversætte de aritmetiske operationer til geometri.

Opgave: Addition og subtraktion

Hvordan vil du lægge to linjestykker sammen geometrisk?
Hvordan vil du trække to linjestykker fra hinanden?
Hvorfor forklarer Descartes ikke dette nærmere?

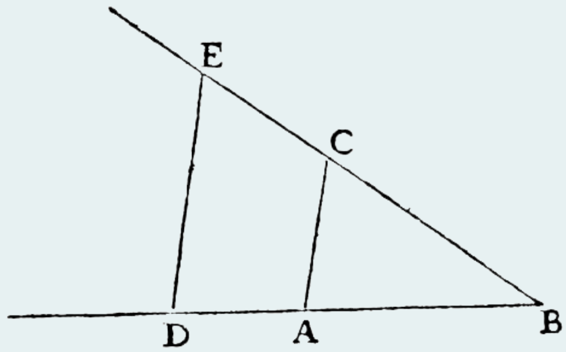
Kommentar: Addition og subtraktion

Descartes forklarer ikke addition og subtraktion i sin tekst, da det er intuitivt klart for ham, og dermed ikke nødvendigt at uddybe. For de fleste elever vil det også være intuitivt, men det kan være forvirrende, hvis de har arbejdet med vektorer - her kan det være værd at understrege, at Descartes kun tænker i længder.

Opgave: Multiplikation og division

Descartes forklarer multiplikation således: *"Lad f.eks. AB være enheden; når jeg skal multiplicere BD med BC, skal jeg blot forbinde punkterne A og C og dernæst trække DE parallelt med CA; BE er da resultatet af multiplikationen."* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 52) og vha. Figur 2.

Har du styr på figuren og hvilke linjestykker, Descartes taler om?



Figur 2
Multiplikation og division. Figuren stammer fra fr.wikisource.org/wiki/Page:Descartes_La_Géométrie.djvu/8

Brug et dynamisk geometriprogram til at konstruere en figur som Descartes', hvor det er muligt at variere *BD* og *BC*, og tjek om *BE* rent faktisk giver produktet?

Descartes forklarer division således: *"Hvis BE skal divideres med BD, forbinder jeg punkterne E og D, trækker AC parallelt med DE, og BC er da resultatet af denne division."* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 52) og vha. figuren ovenfor.

Gør som Descartes forklarer – få styr på figuren og lav en konstruktion i et dynamisk geometriprogram.

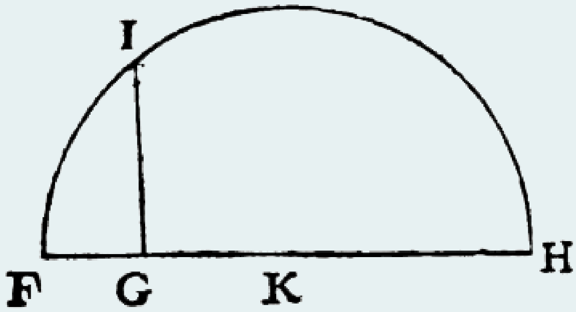
Vis, at $BE = BD \cdot BC$

Kommentar: Multiplikation og division

Når man skal vise $BE = BD \cdot BC$, skal man trække på elevernes viden om ensvinklede trekanter. Det kan være en god idé at tegne trekanterne *ABC* og *DBE* hver for sig, og derefter overveje, hvorfor de er ensvinklede og hvilke linjestykker, der er ensliggende.

Opgave: Kvadratrod

Descartes forklarer, hvordan man uddrager kvadratrod således: *“Hvis kvadratroden skal uddrages af GH, føjer jeg den rette linje FG, som er enheden, til den, deler FH i to lige store dele ved punkt K; med centrum i K tegner jeg cirklen FIH, oprejser derefter fra punkt G en linje vinkelret på FH til I. GI er da den søgte rod.”* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 52) og vha. Figur 3.



Figur 3
Kvadratrod. Figuren stammer fra fr.wikisource.org/wiki/Page:Descartes_La_Géométrie.djvu/8

Har du styr på figuren og hvilke linjestykker Descartes taler om?

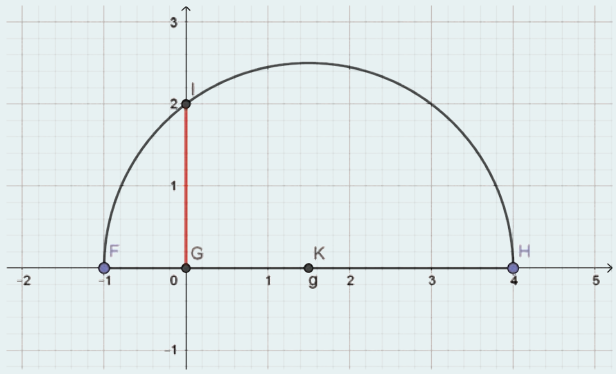
Brug et dynamisk geometriprogram til at konstruere en figur som Descartes’, hvor det er muligt at variere *GH*, og tjek om *GI* rent faktisk er kvadratroden.

Hvordan skal enheden *FG* ligge i koordinatsystemet, for at man kan aflæse kvadratroden *GI* op ad *y*–aksen? Hvorfor er dette smart?

Nedskriv de matematiske argumenter bag kvadratrodsuddragningen. Hvilke allerede kendte sætninger benytter du?

Kommentar: Kvadratrod

Placerer man enheden på koordinatsystemets *x*–akse fra 0 til –1, vil punktet *G* ligge i (0, 0) og længden *GH* kan aflæses ud ad *x*–aksen. Cirkelbuen *FH* vil dermed blive konstrueret så kvadratroden af længden *GH* (som er *GI*) kan aflæses på *y*–aksen. Således vil en ændring af punktet *H* på *x*–aksen give en ændring af cirkelbuens skæring med *y*–aksen. Se figur 4.



Figur 4
Descartes' kvadratrod konstrueret i GeoGebra.

Det er muligt at finde en gennemgang af de matematiske argumenter bag Descartes’ figur i (Brydensholt og Ebbesen, 2012, s. 83 – 84).

Descartes skriver, at det er mere bekvemt at skrive om kubikrødder og andre rødder senere, men hvis man fx vil konstruere en kubikrod, kan man ikke nøjes med at bruge passer og lineal, men man må inddrage mere komplicerede værktøjer. For at konstruere kvadratroden af en størrelse, skal man konstruerer én mellemproportional mellem enheden og den givne størrelse (*x* er en mellemproportional mellem *a* og *b* hvis: $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$). Det kan man gøre med passer og lineal. Hvis man fx vil tage kubikroden, skal man konstruerer to mellemproportionaler, og der kan man ikke nøjes med at bruge passer og lineal.

Opgave: Tal i geometrien

Hvorfor tror du, at Descartes eksempelvis skriver: *"Når jeg skal tilføje linjen BD til GH, kalder jeg den ene a og den anden b, og jeg skriver a + b, og a – b for at trække b fra a, og ab for at multiplicere den ene med den anden"* og *"aa eller a^2, at multiplicere a med sig selv, og a^3 for at multiplicere den endnu en gang med a ..."* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 52)

Hvordan skal man forstå, at a^3 har lige så mange dimensioner som ab^2? Og hvorfor er det anderledes, når man indfører enheden?

Giv et bud på, hvorfor Descartes skriver: *"F.eks. kan man skrive AB ∝ 1 dvs. AB er lig med 1"* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 53)?

Kommentar: Tal i geometrien

For en gymnasieelev kan det virke selvindlysende og dermed underligt, at Descartes forklarer, hvordan man eksempelvis skal forstå "*a – b*".

Én forklaring er, at man normalt tænker linjestykker som repræsenteret ved deres endepunkter (som hos Euklid). Disse linjestykker omdøber Descartes nu til enkelte bogstaver og bliver dermed nødt til at beskrive, hvad der ligger i denne omdøbning. Ved at indføre denne notation er Descartes ikke blot i stand til at oversætte geometrien til algebra, men også gøre algebraen mere anvendelig ved at løsrive den fra de geometriske dimensioner. Fx skriver han: *"Det skal bemærkes, at ved a^2, b^3 eller lignende forstår jeg almindeligvis helt simple linjer, skønt jeg benytter de navne, der er almindelige i algebraen, og kalder dem kvadrater og kuber osv."* (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s.53).

Da a repræsenterer et linjestykke, vil a^3 repræsentere en kube med sidelængde a. Derfor har ab^2 samme dimension, da ab^2 er en tredimensional størrelse med længderne a, b og b. Før Descartes tænkte man i dimensioner: Man så kvadratroden som en sidelængde, men ved brug af enheden løsriver Descartes sine operationer fra geometrien. Eksempelvis kan man implicit tænke a som $a \cdot 1 \cdot 1$, altså en tredimensionel størrelse, som man kan tage kubikroden af.

Skrivemåden med tegnet " ∝ " er på Descartes' tid nyt og kræver derfor en forklaring (se Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s 32 note 45 for en uddybende forklaring). Descartes har en stor betydning, når det gælder udviklingen af den matematiske notation. Er man interesseret i at se eksempler på udviklingen af matematisk notation, kan man fx se (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 22 – 24) eller (Katz, 2009, s. 471).

Forløb: Andengradsligningen

Det andet forløb knytter sig til siderne 53 – 55 i (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018). Forløbet anvendes bedst i forlængelse af det første forløb, da en forståelse for Descartes' enhed og notation er essentielt. Teksten i dette uddrag er lidt mere avanceret end de foregående sider.

Opgave: Oversættelse

I uddraget beskriver Descartes forskellige trin i oversættelsen mellem geometri og algebra, som er illustreret på figur 1. Du skal nu identificere hvilke af Descartes' sætninger og afsnit, der passer på de forskellige dele af figuren. Altså hvornår skriver Descartes om hhv. geometrisk problem, algebraiske ligninger, løsninger til ligninger og geometrisk konstruktion?

Kommentar: Oversættelse

Descartes er ikke så tydelig, når det kommer til de sidste dele af oversættelsen, og der lægges op til, at læseren selv må tænke med. For Descartes er det ikke den konkrete løsning der er vigtig. For ham er det idéen om at oversætte; hvis man fx kan oversætte et geometrisk problem på en sådan måde, at det kan reduceres til en andengradsligning med én ubekendt, er det vanskelige overstået. I så fald kan man konstruere løsningen vha. passer og lineal.

Opgave: Andengradsligninger

Descartes angiver tre forskellige andengradsligninger (Thorsen, Sørensen og Sørensen, 2018, s. 54 – 55):

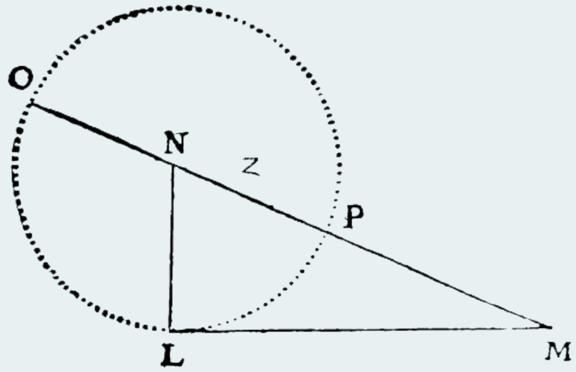
$$z^2 \propto az + bb$$
$$yy \propto -ay + bb$$
$$z^2 \propto az - bb$$

Hvordan vil du skrive en andengradsligning?

Hvilke forskelle er der mellem “din” andengradsligning og Descartes’ tre?

Isolér x^2 i din ligning – sammenlign nu din ligning med Descartes’.

For ligningen $z^2 \propto az + bb$, se på figur 5.



Figur 5
Konstruktion af løsningen til en andengradsligning. Illustrationen stammer fra: fr.wikisource.org/wiki/Page:Descartes_La_Géométrie.djvu/12

Vis, at linjen $OM \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Vis, at $z \propto OM$, altså at $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ er løsning til ligningen $z^2 \propto az + bb$.

Se derefter på de andre andengradsligninger og deres figurer og løsninger og gør som ovenfor.

Kan du få Descartes løsninger til at passe med din egen løsning af en andengradsligning?

Kommentar: Andengradsligninger

Descartes bruger nogle gange a^2 andre gange aa, det kan være forvirrende, men det giver også mulighed for at tale med eleverne om den matematiske notation.

Descartes har kun positive koefficienter i sine ligninger og han søger kun positive løsninger, da de skal kunne konstrueres, derfor får han flere forskellige andengradsligninger. Længere henne i *La géométrie* skriver han dog både om falske rødder (negative rødder) og imaginære rødder.

For at vise, at $OM = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ bruges Pythagoras og at $ON = NL$.

For at vise, at $z = OM$ indsættes $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ på z’s plads i ligningen $z^2 = az + bb$.

For matematiske detaljer, se Brydensholt og Ebbesen, 2012, s. 86 – 90.

Der er mange interessante ting man kan arbejde videre med her. Man kan også konstruere figurerne i et dynamisk geometriprogram og lade eleverne udforske dem. Det kan også være interessant at diskutere, hvad vi ser som en løsning til en andengradsligning. Vi vil gerne have de to værdier af x, mens Descartes er interesseret i at kunne konstruere sin løsning.

Afslutning

Vi har her givet et par bud på, hvordan man kan bruge Decartes’ *La géométri* i undervisningen og, hvordan man kan arbejde med broen mellem geometri og algebra. Det er bestemt ikke et emne, der er udtømt, og vi håber denne artikel kan inspirere til at videre arbejde med Descartes’ bro.

Litteratur

Morten Brydensholt og Grete Ridder Ebbesen (2012). *Lærebog i matematik* – Bind 4. Systime.
Claus Glunk m.fl. (2006). *Q.E.D. Platon og Euklid tegner og fortæller.* Gyldendal.
Victor J. Katz (2009). *A History of Mathematics - An Introduction.* Addison-Wesley.
Matematik A/B/C, stx - Vejledning. Undervisningsministeriet, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, marts 2018.
Karen Thorsen, Henrik Kragh Sørensen og Knud Erik Sørensen (2018): *René Descartes og hans Geometri med en oversættelse af 1. bind*. Steno Museets Venner. smv.ebog.dk/Ren-Descartes-og-hans-Geometri-med-en-oversættelse-af-1-bind-9788788708592
Peter Wolff (1967). *Højdepunkter i matematikken*. Steen Hasselbachs forlag.