Newton, Einstein og Universets ekspansion

Bernhard Lind Schistad, Viborg Tekniske Gymnasium

Friedmann–ligningerne beskriver sammenhængen mellem tidsudviklingen af Universets udvidelse og densiteten af stof og energi. De er løsninger til Einsteins feltligninger i den generelle relativitetsteori, men det viser sig, at de også kan udledes af Newtons mekanik med almindelig gymnasiematematik. Vi ser på, hvorledes de kan udledes baseret på det kosmologiske princip, og hvilke konsekvenser de har for udviklingen af Universets ekspansion.

Indledning

I 1915 offentliggjorde Einstein sin generelle relativitetsteori. Den viser, at tilstedeværelse af masse og energi påvirker metrikken i den firedimensionale rumtid, som igen bestemmer hvorledes fysiske objekter bevæger sig.

Kort tid efter teoriens offentliggørelse, påviste Aleksandr Friedmann at Einsteins ligninger har tre mulige løsninger for kosmologien i et ekspanderende univers:

- Positiv krumning, hvor ekspansionen aftager
- Et statisk univers med konstant ekspansion
- Negativ krumning, hvor ekspansionen vokser

Universets ekspansion angives ved Hubbles konstant, som fortæller hvorledes afstande mellem galakser vokser med tiden. Sammenhængen mellem Hubbles konstant, Universets energitæthed og tiden er givet ved de såkaldte Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker–ligninger. Den kan udledes fra Einsteins feltligninger, medn dette kræver matematik langt ud over gymnasieniveau. Imidlertid findes der en alternativ metode til at udlede ligningen ud fra Newtons mekanik med almindelig gymnasiematematik tilsat en lille smule relativitetsteori. Denne udledning skal vi gennemgå her.

Hubbles lov

Edwin Hubble opdagede i 1922, at en galakses hastighed i forhold til Mælkevejen og andre galakser er proportional med afstanden. Denne sammenhæng er udtrykt i Hubbles lov, som siger, at

$v = H_o \cdot a$, hvor v er hastigheden, a er afstanden og H_o er en konstant, kaldet Hubbles konstant.

Det har senere vist sig, at H_o også varierer med tiden, men det er en langsom variation over lang tid.

At Universet udvider sig, passer meget fint med Einsteins feltligninger, hvor et statisk univers ikke er en løsning af den originale version. Einstein indførte den kosmologiske konstant for at tillade et statisk univers, noget han senere betegnede som den største fejltagelse i sit liv.

Newtons gravitationsteori har også et problem med et statisk univers. Hvis Universet starter med alle stjerner i hvile i forhold til hinanden og en endelig størrelse, vil gravitationen få det til at kollapse. Newton troede selv, at tiltrækningen mellem alle par af stjerner var omhyggeligt udbalanceret af tiltrækningen af fjernere stjerner på den anden side.

Der er én vigtig forskel mellem et ekspanderende univers i Einsteins og Newtons mekanik:

Hvis et Newtonsk univers ekspanderer, sker det ved, at galakserne fjerner sig fra hinanden i et Euklidsk rum, således at koordinatakserne ikke påvirkes af ekspansionen. I Einsteins mekanik er det derimod rummet selv, som ekspanderer. Vi kan opfatte det som om, galakserne ligger i stabile koordinater, men at koordinatakserne strækkes med tiden.

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker–ligningerne

Sammenhængen mellem Universets udvidelse (Hubbles konstant) og rummets krumning R, densiteten af stof ρ og den kosmologiske konstant Λ, er givet ved de berømte Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker–ligninger. De to ligninger siger, at

$$H_0^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c}\right) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (2)$$

Her er G den universelle gravitationskonstant, a er afstanden og $\ddot{a}$ er den dobbeltafledede af a med hensyn til tiden, p er trykket, R er Universets globale krumningsradius og κ er den rumlige krumningsparameter.

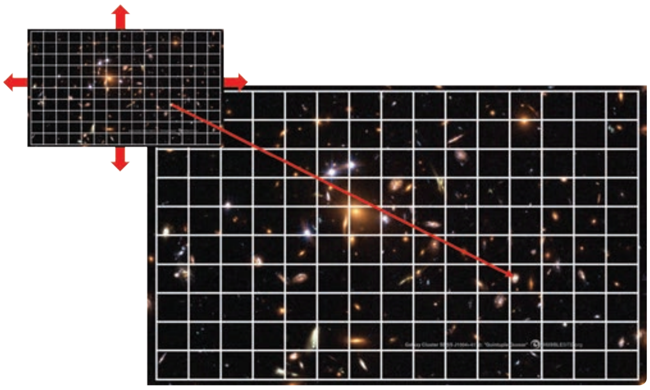
Trykket p kommer fra den såkaldte energi–stress–tensor i Einsteins feltligninger. I vores nuværende univers er trykket så lille, at vi helt kan se bort fra det, så vi kan skrive ligningen som

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \qquad (3)$$

Vi vil nu udlede ligningerne ud fra en simpel generalisering af Newtons mekanik og se på ligningens konsekvenser for et ekspanderende univers.

Ekspanderende koordinater

Vi starter med at forestille os et univers fyldt med galakser. Vi indfører et koordinatsystem, hvor galakserne ligge i faste koordinater således, at hvis afstanden mellem galakserne vokser, så følger koordinatsystemet med og galakserne beholder deres koordinater, se Figur 1.



Figur 1
Skalering af koordinatsystem.

Hvis Universet ekspanderer eller trækker sig sammen, følger gitteret med. Dette giver mening, da galakserne ikke bevæger sig tilfældigt men meget kohærent, som om de sad på en gummimembran, der kan strækkes. Dette er baseret på observationer af bevægelse af nabogalakser. Galakserne gives koordinater efter hvilket gitterpunkt der er tættest på. Afstanden mellem to punkter i dette koordinatsystem (i meter) er afstanden i gitterkoordinater Δx gange skalaparameteren *a*:

$D = a \cdot \Delta x$, hvor Δx er afstanden mellem to gitterlinjer.

Da Universet ekspanderer, vil afstanden mellem to galakser A og B være tidsafhængig:

$$D_{AB} = a(t) \cdot \Delta x_{AB}$$

Afstand i rummet er givet med afstandsformelen

$$D_{AB} = a(t) \cdot \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2 + \Delta z_{AB}^2}$$

Den relative hastighed mellem galakse A og galakse B er givet ved

$v_{AB}(t) = \dot{a}(t) \cdot \Delta x_{AB}$ (vi ser kun på én dimension)

Forholdet mellem hastighed og afstand bliver da

$$\frac{v_{AB}}{D_{AB}} = \frac{\dot{a}(t) \cdot \Delta x_{AB}}{a(t) \cdot \Delta x_{AB}} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

hvor $\dot{a}(t)$ er den afledede af *a* med hensyn til tiden.

Læg mærke til, at Δx_{AB} blev forkortet væk. Det betyder, at forholdet mellem hastigheden, hvormed galakserne fjerner sig fra hinanden, og afstanden er uafhængig af hvilke galakser vi taler om.

Uanset hvor to galakser befinder sig, vil forholdet $\dot{a}(t)/a(t)$ mellem hastigheden og afstanden være den samme.

Dette forhold kaldes Hubbles konstant: $H(t) = \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}$

H kaldes Hubbles *konstant*, men der er ingen grund til at den skal være tidsuafhængig. Den er konstant over hele rummet og har en bestemt værdi i dag, men denne værdi kan have varieret over tid og kan variere i fremtiden. Det vigtige er, at den er uafhængig af de rumlige koordinater *x*, *y* og *z*.

Vi kan nu udtrykke den relative hastighed mellem to vilkårlige galakser ved hjælp af afstanden mellem dem:

$v = H(t) \cdot D$ Dette kaldes Hubbles lov.

Rummets krumning

I den første Friedmann–ligning (1) indgår et led som beskriver Universets globale krumning:

$$-\frac{\kappa c^2}{R^2 a^2}$$

R er den globale krumningsradius, og parameteren κ angiver krumningens fortegn:

$\kappa = -1$	negativ krumning, parabolsk geometri
$\kappa = 1$	positiv krumning, sfærisk geometri
$\kappa = 0$	fladt univers, Euklidsk geometri

Når vi observerer meget fjerne galakser, vil rummets geometri påvirke, hvor stor rumvinkel galaksen fylder på himlen, således, at den bliver forstørret ved sfærisk geometri og formindsket ved parabolsk geometri.

Da vi ikke observerer nogen sådan forvrængning af fjerne galakser, kan vi konkludere, at antagelsen $\kappa = 0$ er en meget god beskrivelse af det nuværende univers. Vi vil derfor herefter se bort fra den globale krumning. Vi kan alligevel have en voldsom lokal krumning fx i forbindelse med sorte huller, men det påvirker ikke den globale geometri.

Densitet

Vi vil nu se lidt på, hvad der sker med densiteten, når rummet udvider sig. Vi vil betragte massen inden for et gitterelement med dimensionerne Δx, Δy og Δz, som er store nok til at udjævne lokale forskelle i densitet (for eksempel en milliard lysår). Hvis densiteten i gitterkoordinater er ν (det er ikke det samme som densiteten i normale enheder), er massen i gitterelementet givet ved

$$M = \nu \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Rumfanget i normale (ikke gitter–) koordinater af denne volumenhed er $V = a(t)^3 \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$. Densiteten i normale enheder og koordinater bliver da

$$\rho = \frac{\nu}{a(t)^3}$$

Mængden af masse i hver gittercelle er konstant, men hvis *a* ændrer sig med tiden, vil ρ også variere.

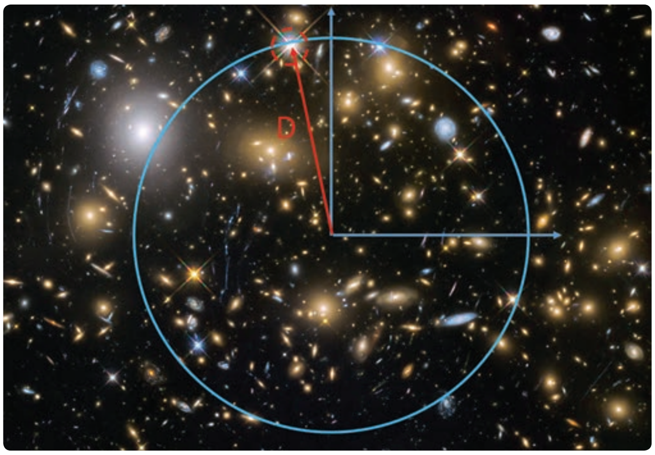
Det kosmologiske princip og gravitationen

Moderne kosmologi er baseret på to antagelser som tilsammen kaldes det kosmologiske princip:

På en tilstrækkelig stor skala er Universet

- *Homogent* (det vil sige at det har samme egenskaber uanset hvor vi befinder os)
- *Isotropt* (det ser ens ud i alle retninger)

Vi vil nu ser på, hvad der sker med gravitationen i det ekspanderende univers. Vi vil betragte gravitationen på en tilfældig galakse. På grund af det kosmologiske princip har Universet ikke noget centrum, så vi kan lægge et koordinatsystem med origo et vilkårligt sted, for eksempel i jordkloden. I henhold til Newtons skalteorem for gravitationen, se Figur 2, vil gravitationen på et objekt, som befinder sig i et sfærisk symmetrisk gravitationsfelt, kun påvirkes af gravitationen fra objekter, som er inden for en kugle med radius lig med afstanden fra origo til galaksen.



Figur 2
Newtons teorem.

Massen inden for kuglen er givet ved

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot D^3 \qquad (4)$$

Hvis vi udtrykker afstanden i gitterkoordinater får vi, at

$$D = a(t) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a(t) \cdot R$$

Vi sætter ind i udtrykket for massen

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a(t)^3 \cdot R^3$$

og får herved bestemt hastighed og acceleration (vi behøver ikke at bekymre os om at differentiere R, da galaksen befinder sig i et fast punkt i gitret):

$$v = \dot{D} = \dot{a}(t) \cdot R$$

$$A = \dot{v} = \ddot{D} = \ddot{a}(t) \cdot R$$

Nu anvender vi Newtons 2. lov samt gravitationsloven til at beregne tyngdekraften på en fjern galakse med masse m. Minustegnet skyldes, at kraften er tiltrækkende og modsatrettet afstanden til galaksen. Vi får

$$F = m \cdot A = -G \cdot \frac{m \cdot M}{D^2}$$

$$m \cdot \ddot{a}(t) \cdot R = -G \cdot \frac{m \cdot M}{a(t)^2 \cdot R^2}$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{G \cdot M}{a(t)^3 \cdot R^3}$$

Vi sætter ind i udtrykket for M fra (4) og får den anden Friedmann–ligning:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a(t)^3 \cdot R^3}{a(t)^3 \cdot R^3} = -\frac{4\pi \cdot G}{3} \cdot \rho$$

Den kosmologiske konstant Λ er ikke med, ligesom den ikke var det i Einsteins oprindelige version af relativitetsteorien. Vi lægger mærke til, at ligningen er uafhængig af R da Universet er homogent. Det vil sige, at den holder for alle galakser.

Her kan vi allerede se, at et statisk univers er uforeneligt med teorien. Kun hvis densiteten $\rho = 0$, kan Universet være statisk. Da densiteten ρ varierer med tiden, erstatter vi den nu med densiteten i gitterkoordinater og får

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \frac{v}{a(t)^3}$$

Dette er en differentialligning, hvor kun a og $\ddot{a}$ er funktioner af tiden, alle andre størrelse er konstanter. Dette er bevægelsesligningen for skalafaktoren $a(t)$.

Formlen blev oprindeligt opdaget af den russiske fysiker og astronom Alexandr Friedmann i 1924 i forbindelse med løsning af Einsteins feltligninger i den generelle relativitetsteori. Denne bevægelsesligning for skalafaktoren fortæller os, at gravitationen vil bremse Universets ekspansion, men den siger ikke, om den vil standse eller skifte retning. Dette vil afhænge af Universets oprindelige ekspansionshastighed og densitet.

Bevægelsesligningen har vi kunnet udlede udelukkende ud fra Newtons ligninger. Hvis den var hele sandheden, vil skalafaktoren blive ved med at aftage. Dette troede kosmologerne indtil for ca. 15 år siden. Vi skal se, at det forholder sig modsat.

Kritisk densitet

For at forstå, hvorledes densiteten påvirker Universets udvikling, vil vi nu beregne energien til vores enlige fjerne galakse. Den kinetiske energi er efter Newtons mekanik givet ved

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \dot{a}(t)^2 \cdot R^2$$

Den potentielle energi finder vi fra Newtons gravitationspotentiale, hvor vi husker, at $D = a(t) \cdot R$

$$E_{pot} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{a(t) \cdot R}$$

Vi kombinerer begge ligninger og finder:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{a}(t)^2 \cdot R^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{a(t) \cdot R}$$

Vi vil nu prøve at finde en skalafaktor, som præcis får Universets udvidelse til at standse. Dette svarer til, at den totale energi er lig med nul.

$$\frac{1}{2} m \cdot \dot{a}(t)^2 \cdot R^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{a(t) \cdot R} = 0$$

som giver $\dot{a}(t)^2 = \dfrac{2G \cdot M}{a(t) \cdot R^3}$

For at få densiteten ind i ligningen, dividerer vi med $a(t)^2$:

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{2G \cdot M}{a(t)^3 \cdot R^3} = \frac{2G \cdot M \cdot \frac{4}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi \cdot a(t)^3 \cdot R^3}$$

$$= \frac{2G \cdot M \cdot \frac{4}{3}\pi}{V} = \frac{8}{3}\pi \cdot G \cdot \rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi \cdot G \cdot \rho \qquad (5)$$

Dette er Friedmann ligningen for energi 0, som angiver Universets udvidelses"undslipnings"ekspansionshastighed. Idet vi erindrer, at $H(t) = \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, kan vi finde den kritiske densitet, hvor ekspansionen går i stå:

$$\rho_c = \frac{3}{8} \cdot \frac{H(t)^2}{\pi \cdot G}$$

Den bedste astronomiske bestemmelse (2016) af Hubbles konstant er 71,9 (km/s)/Mpc, som svarer til $2{,}3 \cdot 10^{-18}$ (m/s)/m i normale enheder. Når vi indsætter denne værdi, finder vi en kritisk densitet på

$$\rho_c = \frac{3}{8} \cdot \frac{\left(2{,}3 \cdot \frac{10^{-18}}{\mathrm{s}^2}\right)^2}{\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}}$$

$$= 9{,}5 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$$

Dette svarer til ca. 6 brintatomer pr. m³, hvilket ikke ligger langt fra de bedste observationer af Universets densitet.

Tidsudviklingen af Hubbles konstant

Vi har set på specialtilfældet, hvor alle galakser bevæger sig væk fra hinanden med undslipningshastigheden og energien derfor er 0. Vi vil nu betragte det generelle tilfælde.

Vi ser igen på en enkelt galakse i forhold til et sfærisk område med radius *D* og med masse *M* i henhold til Newtons teorem. Hvis galaksen har masse *m* er dens totale energi givet ved

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{mMG}{D}$$

Da energien er bevaret, er dette en konstant, dvs.

$$v^2 - \frac{2MG}{D} = \frac{2E}{m} = \text{konstant}$$

Vi husker, at $D = a(t) \cdot x$ og $v = \dot{a}(t) \cdot x$. Da vi alligevel kun har valgt en vilkårlig afstand *D*, vil vi yderligere forestille os, at galaksen ligger i afstanden $x = 1$. Heraf får vi, at

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{2MG}{a(t)} = c = konstant$$

Vi dividerer med $a(t)^2$ og får

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} - \frac{2MG}{a(t)^3} = \frac{c}{a(t)^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 - \frac{\frac{8}{3}\pi MG}{\frac{4}{3}\pi a(t)^3} = \frac{c}{a(t)^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi\rho G = \frac{c}{a(t)^2}$$

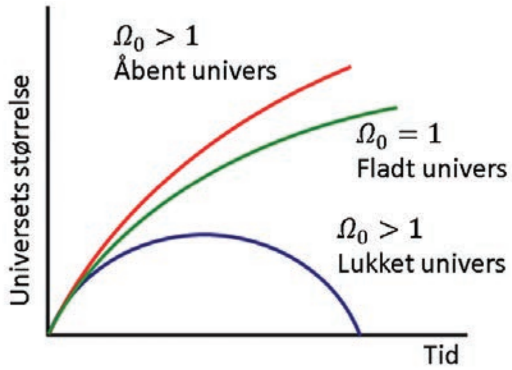
Vi indfører densiteten i gitterenheder og får:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi\nu G}{3a(t)^3} + \frac{c}{a(t)^2}$$

Dette er Friedmann–ligningen for det generelle tilfælde, hvor energien ikke er nul. Tidsudviklingen vil afhænge af fortegnet på *c*, da $a(t)^2$ ikke kan være negativ. I stedet for konstanten *c* er det normalt at beskrive tidsudviklingen som afhængig af densitetsparameteren Ω_0, se Figur 3.

$$\Omega_0 = \frac{\rho}{\rho_c}$$

- Hvis $\Omega_0 > 1$ som svarer til positiv energi, vil den kinetiske energi være større end den potentielle, og Universet vil blive ved med at ekspandere, selv om ekspansionen vil aftage med tiden
- Hvis $\Omega_0 < 1$ som svarer til negativ energi, vil ekspansionen gå i stå, og Universet vil begynde at kollapse
- Hvis $\Omega_0 = 1$ som svarer til energi lig nul, vil ekspansionen gå mod nul



Figur 3
Tidsudviklingen ved forskellige densitets parameteren.

Det materiedominerede univers

Vi vil nu se på løsningerne af Friedmann–ligningen for det materiedominerede univers, hvor densiteten har den kritiske værdi, hvor ekspansionen vil gå i stå. Her er $\frac{8}{3}\pi \cdot G \cdot \nu$ en konstant, så ligningen kan skrives

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \text{konstant} \cdot \frac{1}{a(t)^3}$$

Vi søger efter en løsning på formen $a(t) = ct^p$. Vi sætter ind i ligningen og ser, at den er opfyldt hvis $p = 2/3$.
Vi kan altså udtrykke skalaparameteren med formelen

$$a(t) = c \cdot t^{\frac{2}{3}} \qquad (6)$$

Dette viser, at i et Newtonsk ekspanderende univers, hvor ekspansionen har den kritiske værdi, hvor den går i stå i en uendelig fremtid, vil skalaparameteren udvikle sig med tiden i 2/3 potens.

Det fotondominerede univers

I det meget tidlige univers dominerede energien i stråling (fotoner) totalt over materien. Hvis Universet er fyldt med fotoner, kan vi ikke længer tillade os at bruge Newtons udtryk for energien. Men heldigvis kan problemet løses ved at erstatte masse–densiteten med energitætheden for et fotonfyldt univers. Vi skal altså erstatte $E = mc^2$ med fotonenergi–densitet.

Vi forestiller os en celle i rummet i gitterenheder. Cellen har sider lig med en enhed, $x = 1$, og dens rumfang er derfor $V = a(t)^3$. Cellen er fyldt med fotoner, som hver har energien $E = hc/\lambda$. Når rummet udvider sig, og $a(t)$ vokser, strækkes også bølgelængden tilsvarende. Dette medfører, at fotonens energi aftager, når bølgelængden strækkes. Antal fotoner i boksen vil være konstant, men energien af fotonerne vil aftage, når Universet ekspanderer. Energien pr. foton vil aftage med $1/a$. I modsætning til det materiedominerede univers, hvor energien er konstant, vil fotonenergien i det fotondominerede univers aftage med en over skalafaktoren. Det medfører, at densiteten vil aftage som $1/a(t)$, da cellens størrelse vokser med $a(t)^3$ og energiindholdet i fotonerne aftager med $1/a(t)$.

Friedmann–ligningen for det fotondominerede univers bliver derfor

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi\nu G}{3a(t)^4} + \frac{c}{a(t)^2}$$

Her er årsagen til, at skalaparameteren optræder i 4. potens, at fotonenernes bølgelængde strækkes når Universet ekspanderer.

Vi vil se, om vi kan finde løsninger til denne ligning for at se, hvorledes skalafaktoren udvikler sig med tiden. For at gøre ligningen lettere at løse, sætter vi $c = 0$. Da bliver ligningen

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi\nu G}{3a(t)^4}$$

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{8\pi\nu G}{3}} \cdot \frac{1}{a(t)^2}$$

Vi ganger med $a(t)$ på begge sider og får $\dot{a}(t) = \frac{c_F}{a(t)}$, hvor

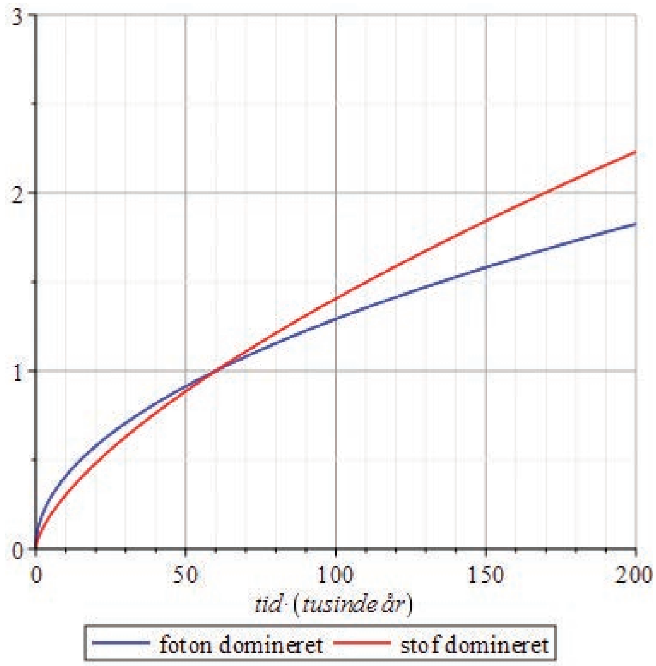
$c_F = \sqrt{\frac{8\pi\nu G}{3}}$ er en konstant.
Dette er en simpel 1. ordens differentialligning på formen

$$\frac{d}{dt}a(t) = \frac{c_F}{a(t)}$$

Den har løsningen

$$a(t) = \sqrt{2c_F} \cdot \sqrt{t} \qquad (7)$$

Det vil sige, at det tidlige univers lige efter Big Bang, hvor fotonerne dominerede, ekspanderede proportionalt med kvadratroden af tiden i modsætning til det materiedominerede univers, som ekspanderede med tiden i 2/3, se Figur 4.



Figur 4
Udvikling af skalafaktoren.

Fysik

Universets tilstandsligning

For at forstå, hvorledes skalafaktoren afhænger af Universets densitet, vil vi studere Universets tilstandsligning. Fra termodynamikken kender vi idealgasligningen. Den angiver sammenhængen mellem tryk, temperatur og rumfang for en gas. Den kan skrives på formen

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{R}{M} \cdot \rho \cdot T$$

hvor M er mol–massen og ρ er densiteten.

I kosmologien giver temperaturbegrebet ikke så megen mening, når vi taler om bevægelse af galakser, så vi opfatter den som en konstant. Det har vist sig, at en meget god approksimation af tilstandsligningen for Universet kan opnås ved at skrive idealgasligningen med konstant temperatur som

$$P = W \cdot \rho \tag{8}$$

hvor P er trykket, ρ er densiteten og W er en konstant.

Vi skal nu se, hvad denne simple tilstandsligning siger om skalafaktoren. Vi forestiller os en rektangulær boks, som indeholder energi i form af materie, for eksempel galakser. Trykket på en af siderne i boksen er lig med kraften F divideret med arealet A af siden

$$P = \frac{F}{A}$$

Hvis vi ekspandere boksen lineært med en længde dx, vil materien i boksen udføre et arbejde på væggen

$$F \cdot \mathrm{d}x = P \cdot A \cdot \mathrm{d}x = P \cdot \mathrm{d}V$$

Hvor dV er ændringen af boksens rumfang. Dette medfører, at energien i boksen aftager med det arbejde, der er udført på væggen

$$dE = -P \cdot \mathrm{d}V \tag{9}$$

Da energien i boksen er lig med energidensiteten ρ gange rumfanget V får vi d$E = \rho \cdot \mathrm{d}V + V \cdot \mathrm{d}\rho$, da densiteten aftager, når energien i boksen aftager. Vi sætter ind i (9) og får

$$\rho \cdot \mathrm{d}V + V \cdot \mathrm{d}\rho = -P \cdot \mathrm{d}V$$

Så sætter vi ind tilstandsligningen (8):

$$\rho \cdot \mathrm{d}V + V \cdot \mathrm{d}\rho = -W \cdot \rho \cdot \mathrm{d}V$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(1+W) \cdot \frac{dV}{V}$$

Vi integrerer og får løsningen

$$\rho = \frac{c}{V^{(1+W)}}$$

hvor c er en integrationskonstant. Men rumfanget V er proportionalt med skalafaktoren $a(t)$ i tredje potens, så vi kan skrive ligningen på formen

$$\rho = \frac{\rho_0}{a(t)^{3(1+W)}} \tag{10}$$

hvor ρ_0 er energidensiteten ved $a(t) = 1$.

Vi vil nu se på de to specialtilfælde, vi undersøgte tidligere. I det materiedominerede univers udgør masse næsten al energi og energien i et rumfang V er lig med $\rho \cdot V$. Men energien er konstant, og når Universet udvider sig, falder energidensiteten med skalafaktoren i tredje potens. Det vil sige, at i det materiedominerede univers er

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{a(t)^3}$$

I det fotondominerede univers så vi, at udvidelsen påvirker fotonernes bølgelængde, så densiteten falder med skalafaktoren i fjerde potens

$$\rho_\gamma = \frac{\rho_0}{a(t)^4}$$

Hvis vi sammenligner med tilstandsligningen (10) ser vi, at $W = 0$ for det materiedominerede univers, og $W = 1$ for det fotondominerede univers.

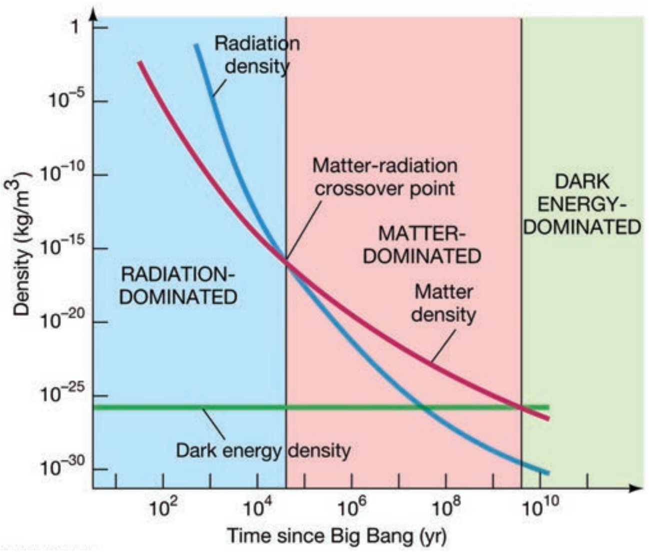
Den kosmologiske konstant

Den kosmologiske konstant Λ optræder på højre side i Friedmann–ligningen. Den stammer fra en rettelse som Einstein indførte til sin berømte feltligning i 1916 for at tillade et statisk univers. Senere kaldte han dette for *”den største fejltagelse i mit liv”*, da den er unødvendig i et ekspanderende univers. Men det har vist sig, at den alligevel har betydning. Årsagen til dette er vakuumenergi.

Vakuumenergi optræder i kvantefeltteori som nulpunktenergi. Selv i absolut vakuum vil der være virtuelle partikler, som eksisterer kortvarigt. Da de opfylder Heisenbergs usikkerhedsrelation, kan deres energi ikke være nul. Dette giver ophav til nulpunktenergi i en kvantificeret harmonisk oscillator. Effekten kan observeres i Casimir–effekten, som skaber tiltrækning mellem elektrisk ledende plader i vakuum og den er også ophav til Hawking–stråling fra sorte huller.

I kosmologien optræder vakuumenergien som en konstant (lille) energidensitet, som fylder hele Universet. Vi vil nu se på, hvilke implikationer dette har på tilstandsligningen.

Vakuumenergi er en egenskab ved rummet og den påvirkes ikke af fysiske processer. Det vil sige, at når Universet ekspanderer, vil densiteten af vakuumenergi være konstant. For at dette skal kunne opfyldes, må $W = -1$ i ligning (9).



Figur 5
Tre faser i Universets ekspansion.

Tilstandsligningen for et univers domineret af vakuumenergi er derfor $P = -\rho_\Lambda$, hvor ρ_Λ er energidensiteten i vakuum.

Vi kan udtrykke denne ved hjælp af den kosmologiske konstant

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi \cdot G}$$

Med denne definition kan vi skrive Freidmann ligningen som

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_\gamma + \rho_v\right) - \left(\frac{\kappa c^2}{R^2 a^2} \approx 0\right)$$

Vi vil nu se på løsninger til ligningen for et univers, hvor vakuumenergien er dominerende. Da $\rho_\Lambda \gg (\rho_\gamma, \rho_v)$, sætter vi derfor $\rho_m = \rho_\gamma = 0$ og får

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_v = \frac{\Lambda}{3}$$

Dette er en differentialligning, som har løsningen

$$a(t) = k \cdot e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \qquad (11)$$

Det vil sige, at rummet ekspanderer eksponentielt med tiden. Et sådant rum, hvor trykket er negativt og vakuumenergien dominerer, kaldes et de Sitter–rum.

Det negative tryk skyldes, at når boksen i tilstandsligningen udvider sig, vokser energien med mere end det arbejde, boksen udfører på omgivelserne.

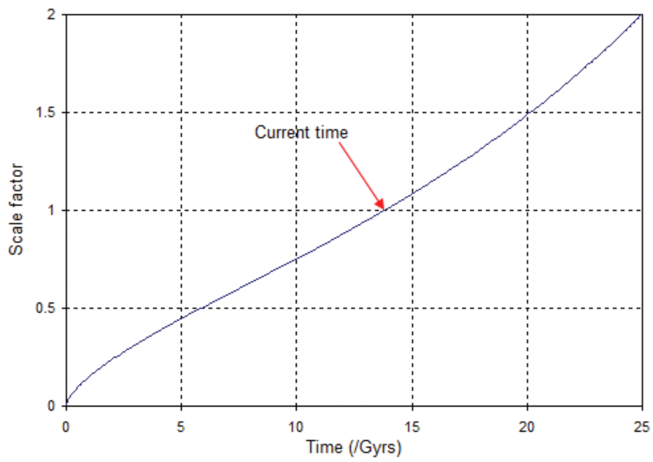
Konklusion

Vi har set, at vi kan udlede Friedmann–ligningerne fra Newtons mekanik og det kosmologiske princip. Vi kan beskrive Universet med en simpel tilstandsligning og vise, at Universet har gennemgået tre faser, se Figur 5. I det tidlige univers dominerede fotonerne og Universet ekspanderede med kvadratroden af tiden. Efterhånden, som der blev dannet stof i form af elementarpartikler, gik Universet over i den stofdominerede fase, hvor ekspansionen er proportional med tiden i 2/3.

Når Universet ekspanderer, falder densiteten, og på et tidspunkt går det ind i sin tredje fase, hvor vakuumenergien dominerer, og Universet begynder en eksponentiel ekspansion. Denne skyldes, at vakuumenergien tiltager, når Universet udvider sig.

Universets eksponentielle ekspansion blev opdaget i 1998 og udløste nobelprisen i fysik i 2011.

Når vi kombinerer de tre faser, får vi et samlet billede af Universets ekspansion som vist i Figur 6.



Figur 6
Tidsudviklingen af Universets ekspansion.