

Kinematik – systematisk fejl i databehandlingen

HENNING SCHOU, Frederiksen Scientific A/S

Problemet

De færreste kan vel huske, hvornår de første universaltællere eller timere dukkede op, men siden Ruder Konges tid har man kunnet måle ”Passagetid A”, ”Passagetid B” og ”Intervaltid AB” med sådan en fyr og et par fotoceller. Tanken

er at kunne bestemme hastigheden ved passage af de to fotoceller samt den tid, der forløber mellem de to hastighedsmålinger, hvorved accelerationen kan beregnes. Eksperimentet kan udføres under overskrifter som ”*Jævnt accelereret bevægelse*”, ”*Newtons 2. lov*” el-

ler ”*Bevægelse på et skråplan*”. Det var sidstnævnte variant, som for nyligt gav mig rynker i panden.

Målingerne så meget smukke og konsistente ud – accelerationen var bare en håndfuld procent for lav. Det plejer at

kunne afskrives som måleusikkerheder eller luftmodstand, men der var nogle helt systematiske tendenser, som ledte til en grundigere behandling. Nedenstående er resultatet.

Startbetingelser og definitioner

- En vogn forsynet med en ”fane” passerer to fotoceller A og B.
- Bevægelsen antages at ske med konstant acceleration a .
- Bevægelsen starter til $t = 0$ med $s = 0$ og $v = 0$ et stykke før vognen når fotocelle A.
- Vognens position regnes som forkan-ten af ”fanen”.
- Fotocelle A har positionen s_1 og fotocelle B har positionen s_2 .
- Fanens længde er L . Vognens position efter passage af de to fotoceller er derfor hhv. $s_1 + L$ og $s_2 + L$.
- Tidspunktet for fanens indtræden i fotocellerne betegnes t_1 og t_2 .
- Timeren måler passagetiden for fotocellerne: t_A og t_B – samt tidsintervallet fra fanens forkant indtræder i fotocelle A, til den indtræder i fotocelle B: t_{AB} hvor det gælder, at $t_{AB} = t_2 - t_1$.

Kinematisk beregning

Grundet begyndelsesbetingelserne har vi følgende simple sammenhænge:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v = a \cdot t$$

Vognens position før og efter passage af fotocelle A kan nu opskrives sådan:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2$$

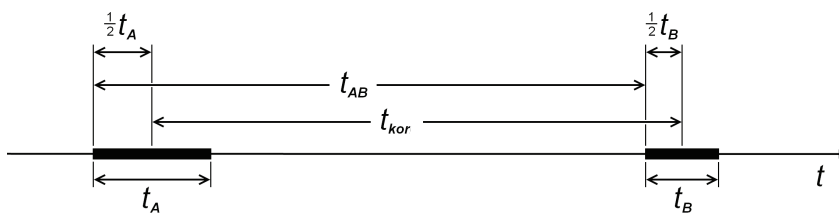
$$s_1 + L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_1 + t_A)^2$$

Dermed kan fanens længde skrives som

$$L = (s_1 + L) - s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_A^2 + a \cdot t_1 \cdot t_A$$

Den målte middelhastighed ved passage af fotocelle A bliver nu

$$v_A = \frac{L}{t_A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_A + a \cdot t_1$$



Og helt tilsvarende fås

$$v_B = \frac{L}{t_B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_B + a \cdot t_2$$

Tilvæksten i middelhastighed kan nu beregnes:

$$\begin{aligned} v_B - v_A &= a \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t_B - t_A) \\ &= a \cdot \left(t_{AB} + \frac{t_B - t_A}{2} \right) \end{aligned}$$

Hermed kan accelerationen udtrykkes ved målbare størrelser:

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_{AB} + \frac{t_B - t_A}{2}}$$

Det er derfor naturligt at definere den korrigerede intervaltid t_{kor}

$$t_{kor} = t_{AB} + \frac{1}{2} t_B - \frac{1}{2} t_A$$

hvorved accelerationen kan udtrykkes

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_{kor}}$$

Pædagogik

Målinger på en konstant accelereret bevægelse vil typisk kunne bruges som introduktion til kinematik, hvor ovenstående udledning næppe vil virke befordrende. Der er derfor behov for et simp-lere argument:

For hver måling findes middelhastighe-den af vognen ved passage af fx foto-celle B som

$$v = \frac{L}{t_B}$$

Men **hvornår** har vognen netop denne hastighed?

Vognen accelererer; den er lidt langsom-mere, når fanen rammer lysstrålen, og lidt hurtigere, når den slipper igen. Hvis ac-celerationen er konstant, er det korrekte tidspunkt **midtpunktet** af tidsintervallet.

Når vi skal finde tidsforskellen mellem passage af de to fotoceller, skal vi derfor bruge tidsforskellen mellem **midten** af de to tidsintervaller t_A og t_B – og ikke for-skellen mellem deres venstre endepun-ter, som er det, stopuret måler som t_{AB} .

Derfor indfører vi den korrigerede tids-forskel t_{kor} . Det fremgår af figuren, at denne findes som

$$t_{kor} = t_{AB} + \frac{1}{2} t_B - \frac{1}{2} t_A$$

Konklusion

Benyttes man naivt de målte tider fra ti-meren til direkte indsættelse i ligningen

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

begår man en ikke ubetydelig systema-tisk fejl.

Fejlen undgås ved som tidsinterval at be-nytte den korrigerede værdi

$$\Delta t = t_{kor} = t_{AB} + \frac{t_B - t_A}{2}$$

Korrektionen kan udledes eksakt, og kan forklares rimeligt overbevisende med ”hand waving”-argumenter.