Archimedes' svingning

Jens Busck, Skive Gymnasium og HF

Indledning
Et vippende glas i opvaskebaljen, et lille badedyr i badekarret, en farvandsbøje i havet er alle båret oppe af Archimedes' opdriftskraft og vippende op og ned med dæmpede harmoniske svingninger. Nedenfor udledes et udtryk for svingningstiden af et system påvirket af tyngdekraften og Archimedes' opdriftskraft.

Emnet er beslægtet med såkaldte *Lee waves* og *internal waves*, se eventuelt mere herom på engelsk wikipedia.

Teori
Archimedes' lov kan kvalitativt formuleres som følger:
Opdriftskraften på et system, helt eller delvist nedsænket i gas eller væske, er lige så stor som, men modsatrettet, tyngdekraften på den af systemet fortrængte gas eller væske.

Kvantitativt formuleret kunne det være som følger:

$$F_{op}(t) = \rho_f \cdot g \cdot V(t)$$

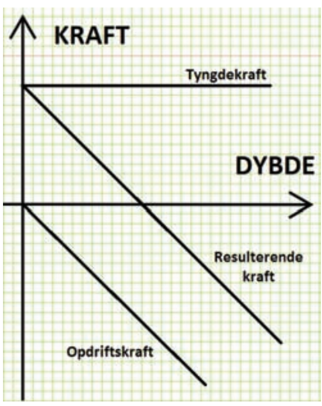
hvor $F_{op}(t)$ er opdriftskraften, som her afhænger af tiden, ρ_f er densiteten af den fortrængte gas eller væske, g er tyngdeaccelerationen, og $V(t)$ er volumen af den fortrængte gas eller væske, der her er afhængig af tiden (t), da det er svingning, der er i fokus.

Det forudsættes, at det oscillerende systems gennemsnitlige densitet er mindre end det opdriftsgivende medium. *Flydebetingelsen* skal være opfyldt.

Der gøres midlertidigt den simplificerende antagelse, at systemets vandrette tværsnitsareal (A) er konstant. Volumen af den fortrængte gas eller væske skrives:

$$V(t) = A \cdot x(t)$$

hvor $x(t)$ er dybden fra overfladen af den opdriftsgivende gas eller væske til undersiden af det svingende system.



Figur 1
Skitse af tyngdekraft, opdriftskraft, og resulterende kraft. "Dybde" x(t) henviser til den del af systemet, der er nedsænket. Kræfterne regnes positivt nedad, således at tyngdekraften regnes positiv. Skitsen er analog til et fjedersystem, hvor Archimedes' opdriftskraft er byttet om med fjederkraften beskrevet ved Hookes lov.

Analogt til teorien om fjedersvingninger indbefattende Hookes lov og Newtons 2. lov opskrives følgende andenordens differentialligning for den resulterende kraft, hvor Hookes lov er byttet ud med Archimedes' lov. Den resulterende kraft skrives:

$$F_{res} = m \cdot x''(t) = -\rho_f \cdot g \cdot A \cdot x(t) + m \cdot g$$

hvor m er massen af systemet, $x''(t)$ er systemets acceleration. Resten af bogstaverne er beskrevet ovenfor. I ligevægtsdybden er accelerationen og den resulterende kraft nul. Den opdriftsgivende gas eller væske antages at være gnidningsfri, hvilket resulterer i en udæmpet svingning.

Med en koordinattranslation, hvor nulpunktet flyttes til ligevægt mellem tyngdekraften og opdriftskraften, skrives ovestående udtryk:

$$m \cdot y''(t) = -\rho_f \cdot g \cdot A \cdot y(t)$$

hvor $y(t)$ er udsvinget fra ligevægtsdybden. Differentialligningen har den generelle løsning, en udæmpet harmonisk svingning:

$$y(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = C \cdot \sin\left(\left(\sqrt{\frac{\rho_f \cdot g \cdot A}{m}}\right) \cdot t + \varphi\right)$$

hvor ω er svingningens vinkelhastighed, C er amplituden, φ er fasen, og t er tid.

Vi lader amplitude og fase være, og fokuserer på bestemmelse af svingningstiden for én svingning:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

hvilket giver:

ARCHIMEDES' SVINGNINGSTID

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho_f \cdot A \cdot g}} \qquad (1)$$

hvor m er systemets svingende masse, ρ_f er densiteten af den fortrængte gas eller væske, A det svingende systems tværsnitsareal, og g er tyngdeaccelerationen.

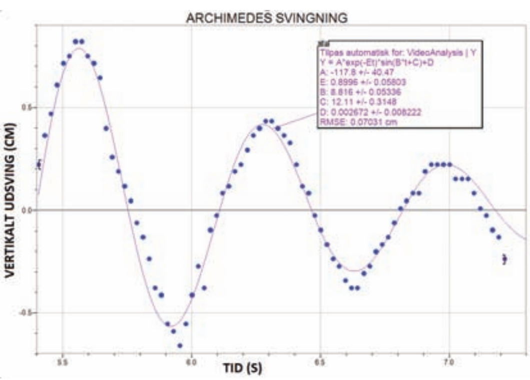
Udtrykket for svingningstiden (1) er uafhængig af, om det er dæmpet eller udæmpet svingning, altså uafhængig af om væsken er med eller uden gnidning. Det ses af udtrykket, at svingningstiden øges ved stigende masse i analogi med fjedersvingninger. Systemets *fjederkonstant* ($\rho_f \cdot A \cdot g$) afhænger af tyngdeaccelerationen (g). Det minder om svingningstiden for et pendul. Det er fristende at sige, at udtrykket for svingningstiden for Archimedes' svingning *"ligger et sted imellem"* svingningsudtrykkene for en fjeder og et pendul.

Forsøg med svingende "bøjer" – 1) et reagensglas delvist fyldt med vand og 2) vanddunk delvist fyldt med sand og grus
Archimedes' svingning (1) er efterprøvet eksperimentelt. Forsøgsopstillingerne er vist på billederne. I det første forsøg er et reagensglas delvist fyldt med vand sat i svingninger. I det andet forsøg sættes en to liters vanddunk delvist fyldt med sand og grus i svingninger. De dæmpede svingninger fra de to forsøg videofilmes. Svingningstiderne i de to forsøg findes med sinus–regression i Loggerpro. Alle svingningstider fra de to forsøg er samlet i et diagram som funktion af kvadratroden af massen over kvadratroden af tværsnitsarealet. Det antages at vandets densitet er den samme i de to forsøg.

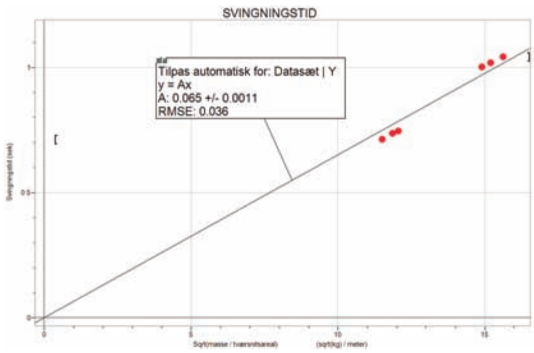
Konklusion

De to forsøg underbygger svingningsteorien baseret på Archimedes' lov, som beskrevet ovenfor, med en fejlmargen på cirka 5 %.

Figur 2
Stort vandglas med oscillerende "bøje": Et reagensglas delvist fyldt med vand. Bøjen sættes i svingninger med et ganske lille puf. Svingningerne filmes og databehandles med videoanalyse. Svingningerne er i praksis dæmpede svingninger. Der er foretaget tre målinger med masserne: 29,25 g, 28,30 g og 26,65 g. De nævnte masser er masserne af det tynde reagensglas plus det vand, der er inden i reagensglasset. Desværre er det kun et lille masseinterval, hvori reagensglasset kan svinge relativt stabilt op og ned. Diameter af reagensglasset er 1,6 cm.



Figur 4
Svingende vanddunk med varierende mængde sand og grus. Svingningstider målt med tre forskellige masser: 1,677 kg, 1,742 kg og 1,844 kg. Diameter 9,8 cm. Som med reagensglasset er det relativt vanskeligt at få vanddunken til at svinge med acceptabel grad af stabilitet. Er der for lidt sand i, vipper den over og lægger sig skråt i vandet. Er der for meget i, ligger den for dybt og antagelsen om konstant tværsnitsareal er truet, da toppen af vanddunken runder indad mod skruelåget.



Figur 5
Svingningstider for reagensglas delvist fyldt med vand i varierende mængde, og vanddunk delvist fyldt med sand og grus i varierende mængde. Vanddunkens svingningstid ligger omkring 1 sekund, og reagensglassets svingningstid på omkring 0,75 sekund. Hældningstallet er lig med $2\pi/\sqrt{(\rho_f \cdot g)}$. Sættes tyngdeaccelerationen g = 9,82 N/kg, giver regressionen en værdi for vandets densitet på 952 kg/m^3, med en afvigelse på cirka 5 %.

Kilder

Elvekjær, m.fl., *FysikABbogen 2*, Systime.
Brydensholt m.fl., *Orbit BA*, Systime.

Figur 3
Eksempel på resultatet af en videoanalyse af reagensglassvingninger. Svingningstiden ($T=2\pi/\omega$) kan beregnes ud fra svingningens vinkelhastighed ifølge regressionen $\omega \sim B$, hvor $B = 8{,}816\ s^{-1}$. Det spiller ingen rolle for svingningstiden, om svingningen er dæmpet eller udæmpet. Dæmpningen i sig selv er interessant, men ikke i fokus her.