Bernoullis ligning med et temperaturled

JØRGEN ANGELO, civilingeniør, DTU

Jeg vil i det følgende se på opvarmningen af vand ved friktion i et vandløb og foreslå et temperaturled i Bernoullis ligning. Bemærk, at bogstavet A bliver brugt i to betydninger, idet det dels betegner et tværsnitsareal [m^2], dels et mekanisk arbejde [J]. Ligledes bliver bogstavet Q brugt i to betydninger, idet det dels betegner en vandføring [m^3/s], dels en varmemængde [J].

Indledende betragtninger

I fysik på gymnasialt niveau lærer man, at der gælder formlen:

$$E_{\text{mek}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konstant}$$

når den mekaniske energi er bevaret. Tabet i potentiel energi vil svare til væksten i kinetisk energi.

Dette gælder for eksempel for et meteor, der nærmer sig Jorden.

I det lufttomme rum vil dette være en god tilnærmelse. Imidlertid vil en stor del af den mekaniske energi omdannes til friktionsenergi, når meteoret når Jordens atmosfære. Det vil derefter være en dårlig tilnærmelse at antage bevarelse af den mekaniske energi.

I andre sammenhænge fra hverdagen spiller friktionsenergien en stor rolle. Hvis vi ser på en cykel eller en bil, der kører, vil det over et længere tidsforløb være en rigtig god antagelse, at alt det af motoren udførte arbejde er omdannet til friktionsenergi. Det gælder selvfølgelig især hvis køreturen starter og slutter i samme højde, så den potentielle energi er uændret.

Vandløb i et bjerglandskab

Jeg forestiller mig et vandløb, der løber ned ad et bjerg. Hvis vandets tværsnitsareal er A, farten er v og vandføringen er Q, vil der gælde ligningen:

$$Q = v \cdot A$$

For at gøre det simpelt, så lad os antage, at vandets fart er den samme i toppen og i bunden af bjerget. Denne antagelse vil være korrekt, hvis vandets tværsnitsareal er uændret i toppen og bunden af bjerget, idet Q jo er uændret ifølge kontinuitetsbetingelsen. I så fald er hele den oprindelige potentielle energi blevet omdannet til varme. Da det jo først og fremmest er vandet, der bliver deformeret, når det løber ned over stenene, og ikke omvendt (der rives selvfølgelig nok en sten af i ny og næ), ja så bliver friktionsarbejdet overført til vandet, og det er vandet, som bliver varmet op, når det bliver æltet rundt på vejen ned ad bjerget.

Vi har, at $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$. Derudover har vi, at varmeenergien, som er modtaget i vandet, er $Q = m \cdot c_v \cdot \Delta t$. Sætter vi de to energimængder lig med hinanden, får vi

$$\Delta t = \frac{g \cdot h}{c_{\text{v}}}$$

Denne temperaturstigning bliver ved en højdeændring på 1000 m lig med

$$\Delta t = \frac{9{,}82\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1000\ \text{m}}{4180\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}} = 2{,}35\ {}^\circ\text{C}$$

Ovenstående beregning svarer i øvrigt til at anvende termodynamikkens 1. hovedsætning:

$$\Delta E = Q + A$$

idet Q er den tilførte varmemængde, A er det tilførte arbejde og vi så skal opfatte E som den samlede energi, og ikke bare den indre energi og sætte

$$\Delta E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = -A$$

Bernoullis ligning

Jeg vil indsætte varmetilvæksten i den version af Bernoullis ligning, der har enheden meter:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{konstant}$$

Her er z den geometriske højde, $\frac{p}{\rho \cdot g}$ er trykhøjden, og det sidste led er hastighedshøjden. Bernoullis ligning forudsætter som bekendt, at den samlede *"energihøjde"* er konstant, hvis den mekaniske energi er bevaret ved overgangen mellem to situationer. Vi kan nu introducere en *"temperaturhøjde"*, ved at isolere h i den forrige beregning. Vi får da et led, der hedder

$$\frac{c_{\text{v}} \cdot t}{g}$$

Dette led kan vi nu lægge til i Bernoullis ligning, så den ser således ud:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{c_{\text{v}} \cdot t}{g} = \text{konstant}$$

Leddet, der svarer til *"temperaturhøjden"*, vil ifølge ovenstående betragtninger få større og større vægt, efterhånden som vandet når længere ned ad bjerget.

For at pengene skal kunne passe, må vi så forudsætte, at der ikke fordamper noget vand undervejs, og at vandets samlede energi, altså den mekaniske energi + varmeenergien ikke ændres under turen ned ad bjerget.