Harmoniske svingninger – en elementær udledning

Jan Agentoft Nielsen, Rødkilde Gymnasium

I fysikundervisningen undersøger man hvordan et legeme, der kun påvirkes af en fjederkraft, bevæger sig. I de fysiklærebøger til gymnasiet, som jeg har set, opstiller man differentialligningen $m \cdot x'' = -k \cdot x$ ved brug af Hooke's lov og Newton's anden lov. Herefter kontrollerer man ved indsættelse, at

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

er en løsning. Fra et matematisk perspektiv er dette ikke tilfredstillende, da vi jo måske kun har fundet én måde legemet kan bevæge sig på – der kan være mange andre. Problemet er, at der er tale om en andenordens differentialligning, som vores elever ikke har lært at løse, og at de typiske løsninger enten bruger Wronski–determinant eller den komplekse eksponentialfunktion.

Jeg vil i det følgende præsentere et elementært bevis for, at den angivne løsning beskriver samtlige måder, som legemet kan bevæge sig på. Elementært i den forstand, at det kun bruger metoder, som eleverne møder i matematik på A–niveau, nemlig separation af de variable og integration ved substitution.

Det springende punkt er følgende: I stedet for at tage udgangspunkt i den angivne andenordens differentialligning, så antager vi, at den mekaniske energi er konstant. Det giver os nemlig følgende, hvor E betegner den konstante mekaniske energi:

$$\begin{aligned} E &= E_{mek}(t) = E_{pot}(t) + E_{kin}(t) \\ &= \frac{1}{2}k \cdot x(t)^2 + \frac{1}{2}m \cdot v(t)^2 \\ &= \frac{1}{2}k \cdot x(t)^2 + \frac{1}{2}m \cdot x'(t)^2 \end{aligned}$$

Det er en førsteordens separabel differentialligning! Vi isolerer derfor x' og bruger separation af de variable. Det giver:

$$\int \sqrt{\frac{m}{2E - kx^2}}\,dx = \pm t + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Ved integration ved substitution og $\left(\sin^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, som eleverne let kan bevise[1)], får vi følgende:

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\ x\right) = \sqrt{\frac{2E}{m}}(\pm t + c),\ c \in \mathbb{R}$$

Ved at isolere x, får vi

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(\pm t + c)\right),\ c \in \mathbb{R}$$

Tilbage er kun at indse, at $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ er den maksimale forskydning , $x_{\max}$, og at bruge vores viden om sinus til at omskrive vores løsning til det ønskede:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right),\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Denne udledning gør det naturligt at inddrage harmoniske svingninger i et samarbejde mellem matematik og fysik med fokus på differentialligninger. Det gør desuden, at beviset ikke længere er forbeholdt de bedste elever. I klasser, der har arbejdet med differentialligninger i 2.g, åbner det desuden for, at harmoniske svingninger kan blive et naturligt SRO emne i fagene matematik og fysik i stedet for som nu primært at være begrænset til SRP.

[1)] $1 = t' = \left(\sin\left(\sin^{-1}(t)\right)\right)' = \cos\left(\sin^{-1}(t)\right) \cdot \left(\sin^{-1}\right)'(t)$

$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}(t)\right)} \cdot \left(\sin^{-1}\right)'(t) = \sqrt{1-t^2} \cdot \left(\sin^{-1}\right)'(t)$