Lodret bevægelse i væsker og gasser

Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium

En del studieretningsrapporter beskæftiger sig med bevægelse med luftmodstand eller bevægelse i væsker. I de senere år har rapporterne været centreret på optagelse af bevægelserne med højhastighedskamera, fulgt af analyse af billederne med et computerprogram.

Med den nuværende matematik– og fysikundervisning i gymnasiet er en teoretisk indgang nok ikke særlig oplagt, men alligevel er det ikke uinteressant at kunne sammenligne med teori. Jeg har haft meget svært ved at finde en teoretisk behandling af emnerne nedenfor, så jeg kan ikke henvise til nogen kilder.

Vi skal se på et legeme, der bevæger sig lodret i en væske eller luftart – kun påvirket af tyngdekraften, opdriften og den gnidningsmodstand, som skyldes viskositet.

For væsker deler bevægelsesligningerne op, eftersom legemets massefylde er større end væskens (legemet synker) eller omvendt, så legemet bevæger sig op. Gnidningsmodstanden er altid rettet modsat hastigheden, mens tyngdekraften altid er rettet nedad.

Vi anvender følgende semi–empiriske udtryk for gnidningskraften:

$$F_{visc} = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

ρ er massefylden for væsken/luften, A er tværsnitsarealet for legemet, v er hastigheden og c_w er den såkaldte dimensionsløse formfaktor. For nemheds skyld sætter vi $F_{visc} = cv^2$.

En omtrentlig værdi for c_w kan findes i en tabel, fx Databogen, hvor man også finder den kinematiske viskositet ν og den dynamiske viskositet η. Sammenhængen mellem de to viskositeter, er den, at $\eta = \nu \cdot \rho$. c_w er angivet for forskellige udformninger af legemet og Reynoldstallet, som er defineret som $Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$. v i tælleren betegner hastigheden og D er den lineære udstrækning af legemet.

Det bemærkes, at bevægelsesligningerne nedenfor godt kan løses, hvis man i stedet anvender Stokes lov for gnidningsmodstanden $F_{stoke} = 6\pi\eta r v$, men for legemer med en diameter på nogle centimeter og en masse omkring 100 g giver det resultater, der ikke er i overensstemmelse med erfaringen.

Hvis legemet bevæger sig opad på grund af opdriften, vil det være påvirket af opdriften samt tyngdekraften og gnidningsmodstanden, der begge har samme retning:

$$F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \quad \Leftrightarrow \quad ma = -mg + m_v g - cv^2$$

Hvis legemet derimod synker, gælder der, at legemet er påvirket af opdriften samt tyngdekraften og gnidningsmodstanden, der nu er modsat rettede:

$$F_{res} = F_T + F_{op} + F_{visc} \quad \Leftrightarrow \quad ma = -mg + m_v g + cv^2$$

m betegner massen af legemet, og m_v er den fortrængte væskemængde, ifølge Arkimedes lov.

Opadgående bevægelse

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_v - m}{m} g - \frac{c}{m} v^2$$

Vi sætter $\mu = \frac{m_v - m}{m}$ og får

$$a = \frac{dv}{dt} = \mu g - \frac{c}{m} v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \mu g \left(1 - \frac{c}{\mu g m} v^2\right)$$

Ligningen kan løses direkte ved separation af de to variable v og t, men man kan også gætte løsningen ved at bemærke, at $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$. Sætter vi nemlig $k^2 = \frac{c}{\mu g m}$ antager ligningen formen

$$\frac{dv}{dt} = \mu g (1 - (kv)^2)$$

som ses at have løsningen

$$v = \frac{1}{k} \tanh(\mu g k t)$$

eller skrevet ud

$$v = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{c(m_v - m)g}{m^2}}\, t\right)$$

tanh nærmer sig hurtigt asymptotisk til 1, fx er tanh(1) = 0,76 og tanh(2) = 0,96.

Sluthastigheden ses at være

$$v = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{(m_v - m)g}{c}}$$

hvilket også kan ses direkte, ved at sætte

$$\frac{dv}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \mu g (1 - (kv)^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{k}$$

Tænker vi os fx en badebold med diameter 0,30 m, så vil vi forsøge at udregne den fart, hvormed den forlader overfladen, hvis den er holdt under vand. Man kan slå formfaktoren op i en tabel, og der finder man, at den for en kugle er $c_w = 0{,}2$. For ovennævnte badebold giver dette værdien $c = 7{,}07$ kg/m i formlen

$$F_{visc} = \tfrac{1}{2} c_w \rho A v^2 = cv^2$$

Løser vi ligningen

Fysik

$$\sqrt{\frac{c(m_v-m)g}{m^2}}\,t=2$$

som svarer til 96 % af sluthastigheden, ses, at det drejer sig om brøkdele af et sekund, før den er opnået, så i eksemplerne nedenfor kan vi anvende sluthastigheden

$$v=\sqrt{\frac{(m_v-m)g}{c}}=4{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Slippes en badebold, der er holdt under vand, vil den efter at have nået overfladen, hoppe stykket

$$h=\frac{v^2}{2g}=0{,}98\ \text{m}$$

For en bordtennisbold med radius 2 cm, og massen 3,0 g forløber regningerne således:

$$Re=\frac{v\cdot D}{\nu}=\frac{4\cdot 0{,}04}{1{,}0\cdot 10^{-6}}=1{,}6\cdot 10^7$$

som giver formfaktoren $c_w=0{,}2$. $A=\pi\,(0{,}02)^2\ \text{m}^2=1{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$ og $\rho=10^3\ \text{kg/m}^3$. Heraf udregnes

$$c=\tfrac{1}{2}c_w\rho A=\ 0{,}1\cdot 10^3\cdot 1{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{kg/m}=0{,}126\ \text{g/m}.$$

Med $m_v=\frac{4}{3}\pi r^3\rho=0{,}0335$ kg fås sluthastigheden

$$v=\sqrt{\frac{(m_v-m)g}{c}}=\sqrt{\frac{0{,}0305\cdot 9{,}82}{0{,}126}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=1{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Med denne sluthastighed skulle bolden altså kunne hoppe stykket

$$h=\frac{v^2}{2g}=0{,}12\ \text{m}$$

Nedadgående bevægelse

Vi ser nu på et legeme, der synker i vand: Bevægelsesligningen er

$$F_{res}=F_T+F_{op}+F_{visc}\ \Leftrightarrow\ ma=-mg+m_vg+cv^2$$

Forskellen fra før er blot, at massen af legemet er større end massen af den fortrængte væskemængde, $m>m_v$. Bevægelsesligningen bliver den samme som før, bortset fra et minustegn:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{m_v-m}{m}g+\frac{c}{m}v^2=-\frac{m-m_v}{m}g+\frac{c}{m}v^2$$

Vi sætter $\mu=\dfrac{m-m_v}{m}$ og får da

$$a=\frac{dv}{dt}=-\mu g+\frac{c}{m}v^2\ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dt}=-\mu g(1-\frac{c}{\mu gm}v^2)$$

Ligningen har den samme løsning som før, bortset fra et minustegn.

Hvis vi som før sætter $k^2=\dfrac{c}{\mu gm}$, antager ligningen formen

$$\frac{dv}{dt}=-\mu g(1-(kv)^2)$$

som ses at have løsningen

$$v=-\frac{1}{k}\tanh(\mu gkt)$$

Skrevet ud

$$v=-\sqrt{\frac{(m-m_v)g}{c}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c(m_v-m)g}{m^2}}\,t\right)$$

Ser vi fx på en jernkugle med radius 5 cm og massefylde $\rho=7{,}8\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$, finder man, at $c=0{,}79$ kg/m, $m_v=\rho_{\text{vand}}\cdot V_{\text{kugle}}=1{,}0\cdot 10^3\cdot 4/3\cdot(5\cdot 10^{-2})^3$ kg $=0{,}524$ kg, og $m=\rho_{\text{jern}}\cdot V_{\text{kugle}}=7{,}8\cdot 10^3\cdot 4/3\cdot(5\cdot 10^{-2})^3$ kg $=4{,}1$ kg. Heraf får man sluthastigheden

$$v=-\sqrt{\frac{(m-m_v)g}{c}}=6{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=24\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Lodret bevægelse i luft

For bevægelse i luft kan man i almindelighed se bort fra opdriften. De to bevægelsesligninger bliver da

$$F_{res}=F_T+F_{luft}\ \Leftrightarrow\ ma=-mg-cv^2 \qquad \text{Opad}$$

$$F_{res}=F_T+F_{luft}\ \Leftrightarrow\ ma=-mg+cv^2 \qquad \text{Nedad}$$

Vi løser først for bevægelsen opad:

$$a=\frac{dv}{dt}=-g-\frac{c}{m}v^2\ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dt}=-g(1+\frac{c}{mg}v^2)$$

Vi sætter $k=\sqrt{\dfrac{c}{mg}}$ og får $\dfrac{dv}{dt}=-g(1+(kv)^2)$.

Som før, kan ligningen løses ved separation af de to variable v og t, men det er lettere at bemærke, at $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$, og så gætte på en løsning af formen $v=-a\tan(bt)$. Ved differentiation fås

$$\frac{dv}{dt}=-a(1+tan^2\,bt)b$$

og ved sammenligning med $\dfrac{dv}{dt}=-g(1+(kv)^2)$ ses, at

$$\tan(bt)=kv\ \Leftrightarrow\ v=\frac{1}{k}\tan(bt)$$

Endvidere er $a=-\dfrac{1}{k}$ og $ab=-g\ \Rightarrow\ b=kg$. Løsningen er derfor

$$v-v_0=-\frac{1}{k}\tan(kgt)$$

hvor $k=\sqrt{\dfrac{c}{mg}}$ og $c=\tfrac{1}{2}c_w\rho A$.

For $kgt \ll 1$ er $\tan(kgt)=kgt$, og formlen går, som den bør, over i $v=v_0-gt$.

For en bold med $r=0{,}05$ m og masse $m=250$ g er $c=2{,}0\cdot 10^{-3}$ kg/m og $k=0{,}0285$ s/m. Hvis denne bold kastes op med en begyndelseshastighed på 5,0 m/s, kan vi bestemme tidspunktet, hvor den vender, ved at løse ligningen

$$v=0\ \Leftrightarrow\ \tan(gkt)=kv_0$$

som giver $t=0{,}51$ s. Hvis man vil finde, hvor langt den når op, skal man integrere ligningen ovenfor

$$s-s_0=-\frac{1}{k^2g}\ln(\cos(gkt))$$

Udregner man strækningen svarende til en begyndelseshastighed v_0 = 5,0 m/s, så er der kun en forskel på 2. decimal i forhold til et lodret kast uden luftmodstand.

Vi skal derefter se på et **frit fald med luftmodstand**

$$F_{res}=F_T+F_{luft} \quad \Leftrightarrow \quad ma=-mg+cv^2$$

som fører til ligningen

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{c}{m}v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt}=-g(1-\frac{c}{mg}v^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt}=-g(1-(kv^2))$$

hvor vi har sat $k^2=\frac{c}{mg}$. Den sidste ligning har som vist ovenfor løsningen

$$v=-\frac{1}{k}\tanh(gkt)$$

Sluthastigheden er $v=-\frac{1}{k}=-\sqrt{\frac{mg}{c}}$. Indsættes værdierne for $c = 8{,}1\cdot 10^{-3}$, svarende til en kugle med r = 0,10 m og massefylde $\rho = 1{,}0\cdot 10^3$ kg/m^3, får man v_{slut} = 226 m/s.

Strækningen kan bestemmes ved at integrere hastigheden. Man får

$$s-s_0=\frac{1}{gk^2}\ln(\cosh(gkt)$$

Sluthastigheden opnås omtrent når $gkt = 2$, som giver $t = 1/gk$ = 46 s. Dette vil svare til en strækning på $s - s_0$ = 5200 m.

Jeg kan ikke stå til ansvar for, hvorvidt ovenstående beregninger passer med virkeligheden. Fx er formfaktoren kun fastlagt på nær en faktor 2.