Faldtid fra stor højde (2)

Poul Rose, Vordingborg

I LMFK–bladet marts 2011forekom en artikel med navnet *Faldtid fra stor højde*. Der var tale om en modelsituation, hvor en meget lille punktmasse falder ned mod en meget stor punktmasse. Der blev gjort rede for, at ordet *faldtid* har mening, selv om der er tale om et fald ned i en singularitet. Der blev fundet en formel, hvor d er afstanden mellem punktmasserne ved start:

$$T_{\text{model}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{d^3}{8 \cdot G \cdot M}} \qquad (1)$$

G er gravitationskonstanten og M er massen af den meget store partikel.

I denne artikel er der tale om en ny **Modelsituation**:

> Et meget stort antal punktpartikler med en samlet masse M placeres inde i en kugleflade med radius d således, at massefordelingen er homogen. Partiklerne er i ro. Klokken 0 slippes de løs og overlades til de gensidige gravitationskræfter. Det forudsættes, at der ikke er forstyrrende ydre gravitationskræfter.

Definitioner

Ordet støvbold bruges som navn for denne ansamling af punktpartikler. Udtrykket *delmængde*(d_1) bruges som navn for den delmængde, der ved start afgrænses af en kugleflade med radius d_1 for hvilken, der gælder $0 < d_1 < d$. Analog definition af *delmængde*(d_2). Når ordet "delmængde" forekommer i teksten, menes stedse en delmængde af denne art.

Overvejelser

Der er principielt tale om et mange–legeme–problem. Et problem, man uden større resultat har kæmpet med i 3 århundreder, så jeg foregiver ikke, at jeg ad analytisk vej kan komme frem til resultater om en støvbolds opførsel. Men man kan da gøre sig nogle overvejelser i anledning af kuglesymmetrien. For det første vil jo nok lade alle partikler påbegynde et fald mod centrum. Partikler på samme kugleflade vil nok få en fælles skæbne. Lad dette være en arbejdshypotese. Så kan man nøjes med at følge en enkelt af disse partiklers skæbne.

Notation

- En partikel P på randen af støvbolden har klokken 0 afstanden d fra centrum og hastigheden 0.
- Afstand og hastighed klokken t betegnes med $r(t)$ og $v(t)$, $d = r(0)$.
- En partikel P_1 på randen af delmængde(d_1) har klokken 0 afstanden d_1 fra centrum og hastigheden 0.
- Afstand og hastighed klokken t betegnes med $r_1(t)$ og $v_1(t)$, $d_1 = r_1(0)$.
- Om *delmængde*(d_2) gælder noget lignende.
- Massefylden, der er en voksende funktion af tiden, betegnes med $\rho(t)$.

Overhaling

Hvis der på et tidspunkt forekommer overhaling, eksempelvis $r(t) < r_1(t)$, går det galt med ræsonnementerne i næste afsnit. Jeg har ganske vist forudsat, at massefordelingen i støvbolden er homogen klokken 0, men er den også homogen klokken t? På forhånd kan man blot forvente, at massefordelingen er kuglesymmetrisk. Det er lidt af et dilemma, for det er meget let at udtænke en kuglesymmetrisk massefordeling, hvor der vitterligt forekommer overhaling.
I det følgende beskrives, hvad man kan udlede af følgende 2 arbejdshypoteser:

> *Overhaling forekommer ikke.* (2)
> *På ethvert tidspunkt under faldet er massefordelingen homogen.* (3)

Newtons sætning

På basis af gravitationsloven for punktpartikler undersøgte Newton kraften på en punktpartikel fra en kuglesymmetrisk massefordeling. Anvendt på en tilfældig partikel i vor støvbold med afstand r fra centrum, kan hans resultat klokken 0 formuleres således: Gravitationskræfterne fra de andre partikler har en resultant, der kan udregnes som om massen inden for en kugleflade med radius r er koncentreret i centrum. Gravitationskræfterne fra partiklerne i kugleskallen udenom neutraliserer hinanden. De udgår af regnskabet. Det er i orden at bruge Newtons sætning klokken 0, for en homogen massefordeling er jo også kuglesymmetrisk.

Man kan sige noget mere: Overhalingsforbuddet sikrer, at den masse, der er inde i den omtalte kugle klokken 0, forbliver den samme på senere tidspunkter under faldet. Denne masse, der virker som om den er koncentreret i centrum, kaldes centralmassen. For en partikel P på randen af støvbolden er centralmassen klokken 0 hele støvboldens masse M. Overhalingsforbuddet sikrer, at centralmassen for P også er M klokken t. Centralmassen M_1 for en partikel P_1 på randen af *delmængde*(d_1) er naturligvis mindre. Hvor meget, det drejer sig om, kan ses ved at skrive masse som rumfang gange massefylde:

$$M_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d_1^{\,3} \cdot \rho(0) \qquad M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho(0) \qquad (4)$$

Her er anvendt forudsætningen om, at massefordelingen er homogen. Ved division finder man, at

$$\frac{M_1}{M} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^3 \quad \text{hvoraf} \quad M_1 = M \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^3 \qquad (5)$$

Kollapstid

For en partikel P i støvboldens overflade har man samme situation som den, der er omtalt i de første linier i denne artikel. Faldtiden fremgår af formel (1). Når M erstattes med udtrykket i (4) viser det sig, at d udgår af regningerne. Efter reduktion kan (1) skrives således:

$$\sqrt{\frac{3\cdot\pi}{32\cdot G\cdot\rho(0)}} \qquad (6)$$

Dernæst ses på en partikel P_1 i overfladen af *delmængde*(d_1). Man kan lade, som om kugleskallen udenom ikke eksisterer. Så kan man regne som før. Nu er det d_1, der udgår af regningerne. Det ender med samme udtryk som (6). Massefylden er jo den samme. De samme betragtninger gælder for enhver anden partikel. Alle har samme faldtid. Den fælles faldtid kan kaldes støvboldens kollapstid.

$$T_{\text{kollaps}} = \sqrt{\frac{3\cdot\pi}{32\cdot G\cdot\rho(0)}} \qquad (7)$$

Kollapstiden afhænger ikke af støvboldens størrelse, blot af massefylden.

Refleksion

En støvbold er et underligt objekt. En iagttager i centrum får ikke gradvis støv i øjnene. De nærmeste støvkorn ankommer ikke før de fjerneste. Men klokken T_{kollaps} er de alle ankommet som i et kort lynglimt. Ikke så rart. En delmængde opfører sig, som om resten af støvbolden ikke eksisterer. Og dog opfører delmængden sig som helheden og ligner en kopi af helheden i mindre udgave.

Hvis denne lighed tages bogstaveligt, ville det falde naturligt at se på følgende udsagn: På et tidspunkt, hvor støvbolden er kommet ned på halv størrelse (halv radius), er alle delmængder også kommet ned på halv størrelse. Et udsagn, der kan varieres med "en tredjedel størrelse" osv. En generalisering af dette kan lyde:

> *På et tidspunkt, hvor støvboldens radius er kommet ned på en vis brøkdel af oprindelig radius, er radius i alle delmængder også kommet ned på samme brøkdel af oprindelig radius.* (8)

I det følgende ses på, hvad der kan komme ud af at udnævne dette udsagn til en arbejdshypotese.

Neddrosling

For *delmængde*(d_1) kan indholdet af udsagn (8) formuleres således under anvendelse af symbolerne i Notation: $\frac{r(t)}{d} = \frac{r_1(t)}{d_1}$.

Dette kan omformes til $\frac{d_1}{d} = \frac{r_1(t)}{r(t)}$, der udtrykker, at $r_1(t)$ udgør samme brøkdel af $r(t)$ som d_1 udgør af d. Hvis denne brøk tildeles et symbol, for eksempel α, forenkles senere beregninger. Man har altså

$$\alpha = \frac{d_1}{d} \quad \text{og} \quad \alpha = \frac{r_1(t)}{r(t)} \quad \text{eller} \quad d_1 = \alpha\cdot d \quad \text{og} \quad r_1(t) = \alpha\cdot r(t).$$

Man kan sige, at d og $r(t)$ er neddroslet med samme faktor.

"Fysisk fornemmelse" tilsiger, at så burde også $v(t)$ være neddroslet med samme faktor, dvs. $v_1(t) = \alpha\cdot v(t)$. Sagen kan afgøres ved energibetragtninger.

Energibetragtninger

Partiklerne P og P_1 fra Notation trækkes frem til beskuelse. Først partikel P. Dens mekaniske energi klokken t er lig den mekaniske energi klokken 0:

$$½\cdot m\cdot v(t)^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r(t)} = ½\cdot m\cdot 0^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{d}$$

Da partiklens masse m udgår, fås efter reduktion

$$½\cdot v(t)^2 = G\cdot M\cdot\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{d}\right) \qquad (9)$$

Dernæst partikel P_1. Dens mekaniske energi er ligeledes bevaret:

$$½\cdot m\cdot v_1(t)^2 - \frac{G\cdot M_1\cdot m}{r_1(t)} = ½\cdot m\cdot 0^2 - \frac{G\cdot M_1\cdot m}{d_1}$$

Da partiklens masse m udgår, fås efter reduktion

$$½\cdot v_1(t)^2 = G\cdot M_1\cdot\left(\frac{1}{r_1(t)} - \frac{1}{d_1}\right)$$

Hertil er 3 ting at bemærke:

1) $r_1(t) = \alpha\cdot r(t)$
2) $d_1 = \alpha\cdot d$
3) Centralmassen M_1 for P_1 står i (5).

Brøken, der er opløftet i tredje potens, er vor neddroslingsfaktor α, så $M_1 = M\cdot\alpha^3$. Når dette indsættes, får man

$$½\cdot v_1(t)^2 = G\cdot M\cdot\alpha^3\cdot\left(\frac{1}{\alpha\cdot r(t)} - \frac{1}{\alpha\cdot d}\right)$$

der ved reduktion bliver til

$$½\cdot v_1(t)^2 = G\cdot M\cdot\alpha^2\cdot\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{d}\right)$$

Når dette udtryk divideres med (9) udgår en hel del størrelser. Tilbage bliver:

$$\frac{v_1(t)^2}{v(t)^2} = \alpha^2$$

Alle størrelser er positive dvs. $\frac{v_1(t)}{v(t)} = \alpha$ eller $v_1(t) = \alpha\cdot v(t)$.

Man ser, at $v(t)$ er neddroslet med faktor α som forventet, men af udregningerne fremgår også noget andet.

Fart og afstand

I ovenstående er der to udtryk for α: $\alpha = \frac{v_1(t)}{v(t)}$ og $\alpha = \frac{r_1(t)}{r(t)}$.

Så har man $\frac{v_1(t)}{v(t)} = \frac{r_1(t)}{r(t)}$, der kan omskrives til

$$\frac{v_1(t)}{r_1(t)} = \frac{v(t)}{r(t)} \qquad (10)$$

Ifølge (8) kan et analogt udtryk opskrives for enhver delmængde. Da disse kan ligge vilkårligt tæt, er det svært at forestille sig andet end at alle partikler klokken t er enige om samme værdi for $\frac{\text{fart}}{\text{afstand}}$ (11)

Dette skal forstås helt rigtigt: Klokken t er brøken konstant, når man går fra partikel til partikel, men brøken er aldeles ikke konstant for en og samme partikel, når man går fra sekund til sekund.

Fysik

Funktionen $H(t)$

Definition: $H(t) = \dfrac{v(t)}{r(t)} \qquad 0 \le t < T_{\text{kollaps}} \qquad (12)$

Da alle partikler klokken t er enige om størrelsen af denne brøk, er dette en funktion, der er tilknyttet støvbolden som helhed – ikke bare en enkelt partikel. For et frit fald gælder, at v vokser og r aftager, så $H(t)$ er voksende med startværdi $H(0)$ lig 0. Da $H(t) \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow T_{\text{kollaps}}$, er værdimængden lig med $[0; \infty[$. $H(t)$ opfylder betingelsen for eksistensen af en omvendt funktion. Kender man et tal i værdimængden, svarer hertil entydigt en værdi for t.

Kort sagt: $\frac{v}{r}$ fungerer som tidsindikator. På en måde er der lige så mange synkroniserede "ure" i støvbolden, som der er partikler. Principielt er det en enorm fordel i fysik. Der er ure overalt. Der er bare det problem, at de er svære at aflæse, for klokkeslættet foreligger i form af et tal i værdimængden for $H(t)$. Desværre er H en meget indviklet funktion af tiden. Der er ikke tale om en simpel, algebraisk regneforskrift. Jeg skærer igennem og tabellægger funktionen.

Tabellægning af funktionen $H(t)$

Man skal bruge et planetprogram. I dag betyder ordet "planetprogram" et underholdningsprogram med animationer, i hvert fald ifølge Google. I computerens barndom, da elever og lærere nørklede i computerrummet efter skoletid, betød ordet "program" noget med INPUT, OUTPUT, CASE TRUE OF osv. Man tager et planetprogram fra den gang og ændrer nogle få linier. Starthastigheden $v(0)$ er 0, så man har ikke brug for et INPUT om det. Det nye er, at INPUT for centralmasse ikke mere er uafhængig af INPUT for afstand ved start. Det kan man se af udtrykket for centralmassen for partikel P i støvboldens rand: $M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho(0)$. Der er kobling mellem centralmasse og afstand ved start. Man skal have et INPUT for massefylde $\rho(0)$, men et INPUT for d er overflødigt. Thi $H(t)$ er jo fælles for alle delmængder, så man kunne også indtaste en værdi for d_1 eller d_2. Man kan indtaste hvad som helst. Det er lige meget, hvad tidsforløb angår. Hvis dette ikke er tilfældet ved konkrete computerkørsler, er der enten noget i vejen med programmøren eller med arbejdshypotese (8).

Noget skal computeren have at arbejde med. Man kan fx vælge $d = 117$ m. Dette frie valg af d er ikke så mærkeligt. Lader man programmet køre indtil r er kommet ned på en lille brøkdel af d, så vil computerens værdi for t ligne kollapstiden og den er jo netop uafhængig af støvboldens størrelse. Hvis man undervejs lod programmet udskrive t og $\frac{v}{r}$, ville man få en papirtabel. Jeg fandt det mest praktisk at standse tabellægningen, når programmet nåede frem til det tal i værdimængden for $H(t)$, der lige nu er aktuel. Denne værdi kan betegnes med $H(\text{nu})$, i programmeringssprog med *hnu*. Det sker ved, at man afslutter programmets REPEAT–sætning med UNTIL $v/r > hnu$. Så ligger "nu" mellem computerens sidste 2 værdier for t.

Resultatet er et computerprogram, der fungerer som en automat. Man indtaster værdierne for $\rho(0)$ og $H(\text{nu})$. Ud kommer en tid, dvs. tid fra start til observation af $H(\text{nu})$. Dette program fortjener et navn. Det bliver kaldt "*programH*" i det følgende.

Bemærk: *Også tidsforløb mindre end* T_{kollaps} *er uafhængige af støvboldens størrelse.* (13)

En ukendt støvbold

For en ellers ukendt støvbold er det på en eller anden måde lykkedes at aflæse et af de mange "ure". Klokkeslættet foreligger i form af et tal, $H(\text{nu})$, i værdimængden for $H(t)$. En enkelt information er ikke meget. Uendelig mange støvbolde kan svare til denne information. Det bedste, man kan håbe på, er, at disse muligheder kan beskrives overskueligt ved hjælp af en parameter. Hermed menes 1 parameter. Det ville blive rodet med flere. Opgaven er lidt vanskelig. Man kan end ikke bruge *programH*. Der foreligger jo ikke noget om $\rho(0)$. Det, der nu følger, er en jagt efter massefylde.

For en partikel P i randen gælder: $H(\text{nu}) = \dfrac{v(\text{nu})}{r(\text{nu})}$, dvs. $v(\text{nu}) = H(\text{nu}) \cdot r(\text{nu})$.

Partiklen bevæger sig i gravitationsfeltet fra en centralmasse: $E_{\text{mek}}(\text{nu}) = E_{\text{mek}}(\text{start})$.

Man har: $\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v(\text{nu})^2 - \dfrac{G \cdot M \cdot m}{r(\text{nu})} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 - \dfrac{G \cdot M \cdot m}{d}$

Partiklens masse m går ud og efter omflytning fås:

$$\frac{1}{2} \cdot v(\text{nu})^2 = \frac{G \cdot M}{r(\text{nu})} - \frac{G \cdot M}{d} \qquad (14)$$

Om $r(\text{nu})$ og d ved man ikke andet end at $r(\text{nu})$ er mindre end d. $r(\text{nu})$ er en brøkdel af d, hvilket kan skrives $r(\text{nu}) = \beta \cdot d$, hvor $0 < \beta < 1$.

Jeg har valgt at bruge β som parameter

Sidste brøk i (14) kan skrives således:

$$\frac{G \cdot M}{d} = \frac{\beta \cdot G \cdot M}{\beta \cdot d} = \beta \cdot \frac{G \cdot M}{r(\text{nu})}$$

Så ændres (14) til

$$\frac{1}{2} \cdot v(\text{nu})^2 = \frac{G \cdot M}{r(\text{nu})} \cdot (1 - \beta)$$

Da $v(\text{nu}) = H(\text{nu}) \cdot r(\text{nu})$ og centralmassen M kan skrives $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(\text{nu})^3 \cdot \rho(\text{nu})$, fås

$$\frac{1}{2} \cdot H(\text{nu})^2 \cdot r(\text{nu})^2 = \frac{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(\text{nu})^3 \cdot \rho(\text{nu})}{r(\text{nu})} \cdot (1 - \beta)$$

$r(\text{nu})$ udgår af regnskabet: $\dfrac{1}{2} \cdot H(\text{nu})^2 = G \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho(\text{nu}) \cdot (1 - \beta)$

$\rho(\text{nu})$ isoleres: $\rho(\text{nu}) = \dfrac{3 \cdot H(\text{nu})^2}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot (1 - \beta)} \qquad (15)$

Dette er en massefylde, men ikke den, der skal bruges i *programH*. Man kan finde et udtryk for $\rho(0)$, idet centralmassen M kan skrives på 2 måder:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho(0) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(\text{nu})^3 \cdot \rho(\text{nu})$$

Heraf ses $\rho(0) = \rho(\text{nu}) \cdot \left(\dfrac{r(\text{nu})}{d} \right)^3$ dvs. $\rho(0) = \rho(\text{nu}) \cdot \beta^3$

Sammenholdes med (15) får man

$$\rho(0) = \frac{3 \cdot H(\mathrm{nu})^2}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot (1-\beta)} \cdot \beta^3 \qquad (16)$$

For enhver parameterværdi β kan man beregne $\rho(0)$. Nu har man endelig, hvad der skal bruges for at kunne anvende *programH*. Output er tiden fra start til observation af H(nu).

Når man nu har fundet $\rho(0)$, er det oplagt at indsætte i formel (7):

$$T_{\text{kollaps}} = \sqrt{\frac{3 \cdot \pi}{32 \cdot G \cdot \rho(0)}}$$

Det resulterer i en monstrøs formel. Jeg nøjes med at meddele, at efter reduktion ender det med et relativt simpelt udtryk:

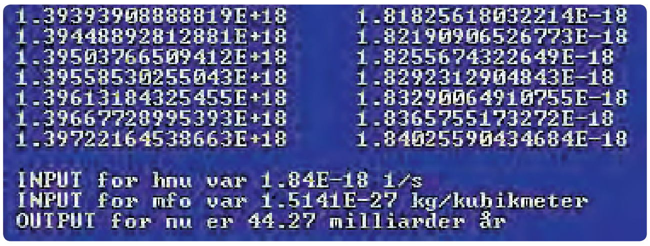
$$T_{\text{kollaps}} = \frac{\pi}{2 \cdot H(\mathrm{nu})} \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta^3}} \qquad (17)$$

Under reduktionen udgik gravitationskonstanten, hvilket et øjeblik ej bekom mig vel. Men naturligvis betyder G noget. G er jo involveret i strukturen af funktionen $H(t)$.

Taleksempel

$H(\mathrm{nu}) = 1{,}84 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$

Parameteren β	T_{kollaps} i år	Tid fra start til obs. af H(nu)	Tid fra obs. til kollaps
0,10	$811{,}6 \cdot 10^9$	$800{,}3 \cdot 10^9$	$11{,}3 \cdot 10^9$
0,20	$270{,}5 \cdot 10^9$	$259{,}6 \cdot 10^9$	$10{,}9 \cdot 10^9$
0,30	$137{,}7 \cdot 10^9$	$127{,}1 \cdot 10^9$	$10{,}6 \cdot 10^9$
0,40	$82{,}8 \cdot 10^9$	$72{,}6 \cdot 10^9$	$10{,}2 \cdot 10^9$
0,50	$54{,}1 \cdot 10^9$	$44{,}3 \cdot 10^9$	$9{,}8 \cdot 10^9$
0,60	$36{,}8 \cdot 10^9$	$27{,}5 \cdot 10^9$	$9{,}3 \cdot 10^9$
0,70	$25{,}3 \cdot 10^9$	$16{,}7 \cdot 10^9$	$8{,}6 \cdot 10^9$
0,80	$16{,}9 \cdot 10^9$	$9{,}3 \cdot 10^9$	$7{,}6 \cdot 10^9$
0,90	$10{,}0 \cdot 10^9$	$4{,}0 \cdot 10^9$	$6{,}0 \cdot 10^9$



Skærmbillede fra kørsel af programH i tilfældet β = 0,50. Der ses et glimt af tabellægningen af H(t). Tid står i kolonnen til venstre, H–værdier til højre. Sidste tal ligger så tæt ved H(nu), at der ikke er grund til at interpolere. Tiden til venstre i sekunder er omregnet til år i OUTPUT. "hnu" står for H(nu). "mfo" for ρ(0), der er udregnet ved hjælp af (16). "nu" står for tid fra start til observation af H(nu).

Tallene i sidste kolonne fremkommer ved subtraktion. Hvis der også forelå en måling af ρ(nu), ville vi komme et afgørende skridt videre. Det ses af formel (15):

$$\rho(\mathrm{nu}) = \frac{3 \cdot H(\mathrm{nu})^2}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot (1-\beta)}$$

Parameteren β kan fikseres, hvorefter den ukendte støvbold ikke mere er så ukendt. Ordet "nu" skal opfattes i bred betydning. Med disse tidsrammer er 100 år et øjeblik.

Bemærkning 1

Tallene i kolonne 2 er fundet med formel (17), men som allerede antydet i afsnittet *Tabellægning* kan man også bruge numerisk integration. Man skal blot afslutte *programH´*s REPEAT–sætning med UNTIL $r < d/10^6$ i stedet for UNTIL $v/r > hnu$. Det gamle planetprogram finder selv en passende intervalinddeling. Det skal brugeren ikke kere sig om. Programmet vælger stedse en sådan værdi af Δt, at $|\Delta r|$ altid er en lille brøkdel af den øjeblikkelige værdi af r. På den måde kan man billedlig talt aldrig "brænde sig på Solen". En egenskab, der netop er brug for her.

For $\beta = 0{,}50$ fandt jeg:
T_{kollaps} med formel (17): 54,1038 milliarder år
T_{kollaps} med numerisk integration: 54,1042 milliarder år
Dette var en stikprøvekontrol af, om der skulle være regnefejl. Derfor de mange cifre.

Bemærkning 2

I fysik er det ikke betryggende, at en størrelse fremkommer som differens mellem 2 store, hvilket er tilfældet med tallene i sidste kolonne. Så derfor er det vigtigt, at tiden fra observation til kollaps faktisk kan beregnes direkte. Udgangspunktet er udtrykket for ρ(nu). Man skal igen have fat i det gamle planetprogram, men på en anden måde, thi nu er der tale om et fald med en given begyndelsesfart: $v(\mathrm{nu}) = H(\mathrm{nu}) \cdot r(\mathrm{nu})$.

Centralmassen er $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(\mathrm{nu})^3 \cdot \rho(\mathrm{nu})$. I henhold til (13) kan r(nu) vælges som man vil, 117 meter eller 117 lysår. Ligegyldigt hvad. Programmets REPEAT–sætning afsluttes med UNTIL $r < rnu/10^6$.

For $\beta = 0{,}50$ fandt jeg:
Tid fra observation til kollaps beregnet som differens: 9,829 milliarder år.
Samme tid direkte beregnet med numerisk integration: 9,830 milliarder år.

I første omgang fik jeg ikke 9,830 milliarder år, men 98,38. Det lignede en gemen kommafejl, men det var mig umuligt at spore, hvordan den var opstået. Efter nogen tid opdagede jeg, at program–løkken var blevet gennemløbet usædvanlig mange gange. Partiklen havde været ude på en lang tur. Begyndelseshastigheden var vendt 180° forkert. Partiklen var steget til tops, hvilket ifølge kolonne 3 tager 44,3 milliarder år. Derefter var den kørt helt ned til centrum, hvilket ifølge kolonne 2 tager 54,1 milliarder år. I alt 98,4 milliarder år. Så der var ikke tale om en kommafejl, men om en utilsigtet stikprøvekontrol af, om der er konsistens i tallene.

Bemærkning 3

For $H(\mathrm{nu}) = 1{,}50 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$ ligger tallene i sidste kolonne mellem 14 og 7 milliarder år.