Newtons gravitationsproblem

Part II: Løsningen i *Principia*

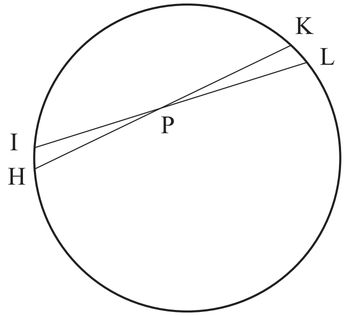
FLEMMING JØRGENSEN, Næstved Gymnasium og HF, *fjbj@stofanet.dk*

Dette er den anden af to artikler – første artikel findes i majnummeret – som tager tråden op efter Ole Witt-Hansens artikel om Newtons gravitationsproblem, altså dette, at man kan beregne gravitationskraften fra et kugleformet legeme som om hele legemets masse var placeret i dets centrum. I denne artikel præsenterer forfatteren Newtons egen løsning.

Betragt to masser μ og M, hvis tæthed er rotationssymmetrisk fordelt om centre med så stor en indbyrdes afstand R, at der ikke er overlap. Disse masser tiltrækker hinanden med kraften

$$F = G\frac{\mu M}{R^2} \qquad (1)$$

hvor G er gravitationskonstanten. Det, vi i part I har kaldt *Newtons gravitationsproblem*, består i at bevise, at denne formel gælder generelt, hvis den antages at gælde for to punktpartikler. I part I blev gjort rede for, hvorledes det centrale i problemet består i at vise, at (1) er rigtig, hvis μ er en punkt-partikel, og M er fordelt over en tynd kugleflade. Dette resultat blev vist ved 3 metoder, hver kendetegnet ved sit specielle valg af integrationsvariabel. Metoderne fremkom alle under mit langsommelige arbejde med at forstå udledningen i Principia – dette gælder specielt metode 2, der er meget tæt på at være Newtons egen. Den moderne formulering fører imidlertid ikke blot en hel del lettere til målet – den når også dette i en mere afklaret form. Det er i hvert fald, hvad jeg søger at begrunde i denne artikels sidste afsnit.



Figur 1: Newtons figur fra Principia. Punktmassen μ befinder sig i punktet P inden for kugleskallen, der bærer den samlede masse M, med samme konstante tæthed overalt.

Som også nævnt i part I er det Ole Witt-Hansens artikel i LMFK-bladet nr. 2, 2008 s. 32, der har igangsat mine undersøgelser. Fra tidligere sporadisk læsning i *Principia* kendte jeg baggrunden for flg. citat fra Emilio Segrè [3 s.61]:

> *The book [Principia] is written in the style of Greek geometry, using geometrical proofs throughout. There is little doubt that many of the results have been obtained otherwise, using analytical methods either known to Newton's contemporaries or invented by him.*

Metoderne i *Principia* kommer ikke i nærheden af egentlig integralregning som i OWH's artikel – hvordan kunne Newton løse problemet uden? Jeg begyndte en systematisk læsning af hans bevis – og løb straks ind i vanskeligheder, som dem Segré beretter om i fortsættelsen af ovenstående citat:

> *The mathematical technique used does not facilitate the reading for a modern student, but perhaps geometrical methods were more familiar to Newton's contemporaries. He told a friend that "to avoid being bated by little smatterers in mathematics [he] designedly made [his] principle abstruse; but yet so to be understood by able mathematicians".*

For mig lykkedes tydningen af afsnittet først, da jeg besluttede mig for at genskrive det i egen formulering. Det har i den grad bidraget til min respekt for det samlede værk således at tygge grundigt på en lille bid af det. Det er mere end imponerende, så mange problemer Newton formår at behandle ved at udvide den græske geometri med intuitivt begrundede resultater for "små" størrelser.

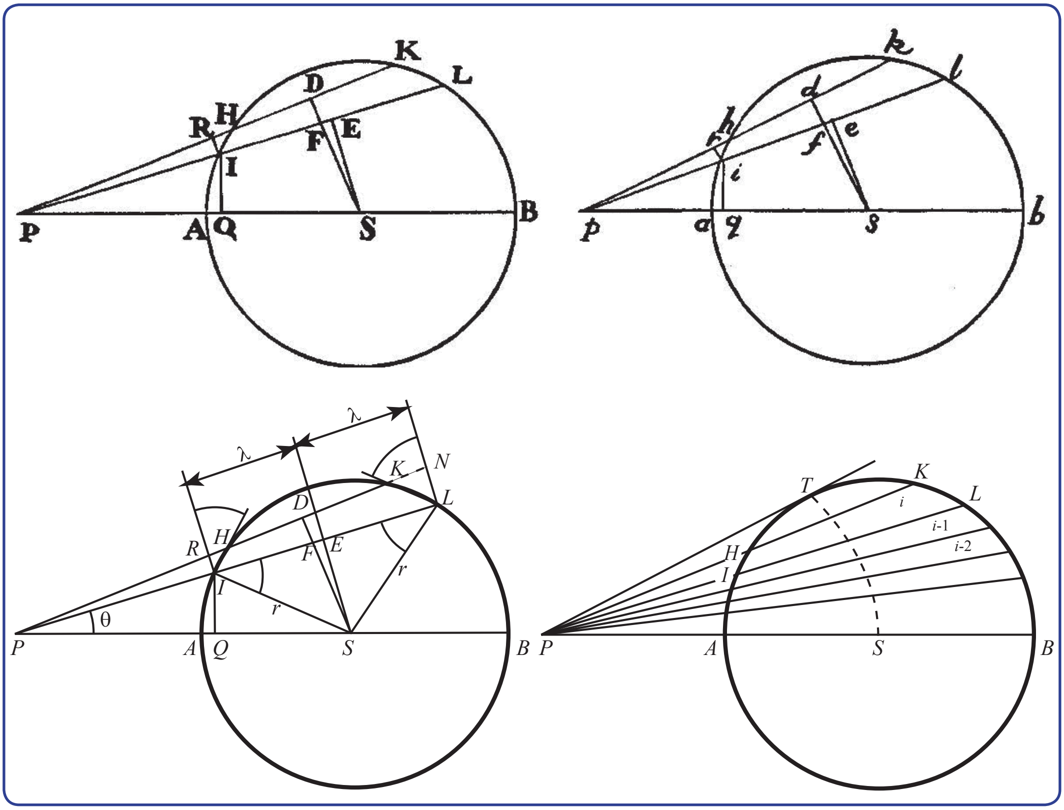
Det er mit håb, at den fremstilling, der nu følger, opleves som værende tilgængelig for en interesseret og dygtig elev på højt niveau.

Starten på Newtons udledning i min formulering

Cirklen i figur 1 er en storcirkel gennem punktet P med massen μ. Man skal forstille sig, at der på kuglefladen mellem de tætliggende punkter I og H ligger et lille areal ΔA_I. Ved tætliggende linjer gennem P afbildes hvert punkt i ΔA_I i et punkt i et tilsvarende areal ΔA_L mellem K og L. Dette areal vil have størrelsen:

$$\Delta A_L = k^2 \cdot \Delta A_I ;\ k = \frac{PK}{PH}$$

Rigtigheden heraf indses, når man bemærker, at tangenterne (planerne såvel som linjerne) gennem L og I danner samme vinkel med forbindelseslinjen LI. Dette betyder jo, at de smalle trekanter PIH og PKL er ensvinklede. Trækket i μ fra massen på ΔA_I er altså præcist ophævet af den k^2 gange så store masse, der sidder på ΔA_L overfor.



Figur 2 a,b,c,d: Figurerne a og b for oven er Newtons egne fra Principia. Den fysiske situation er som i fig. 1, blot befinder μ sig nu i punktet P udenfor overfladen. Korderne HK og IL ligger tæt på hinanden, og den lille forskel SD - SE på radierne i de tangerende cirkler kan derfor regnes for lig DF.

Centerafstanden ps i figur 2b er mindre end PS i fig. 2a, men de tilsvarende korder, og dermed deres centerafstande, er lige store: hk = HK, il = IL, ds = DS, es = ES – og df = DF.

Figur2c for neden er som figur 2a, men med nogle ekstra linjer og betegnelser. Når buerne IH og KL regnes for sammenfaldende med cirklens tangent, er de fire markerede vinkler lige store. Den halve længdeforskel mellem de tætliggende korder IL og HK kan skrives som

$$\Delta\lambda = \frac{IL - HK}{2} = \frac{RH + KN}{2}$$

I figur 2d er korderne IL og HK fra figur 2c vist blandt et stort antal andre, der alle peger mod P og tilsammen tæt udfylder vinkelrummet mellem aksen PS og tangenten PT.

Gentages dette ræsonnement for hvert enkelt lille areal på kuglens overflade, følger det, at den samlede kraft på μ er nul.

Roteres buestykket IH omkring aksen PS, beskriver det en ring med areal $\Delta A_{IH} = 2\pi \cdot IQ \cdot IH$, som bærer en masse

$$\Delta M_{IH} = \frac{M}{4\pi r^2} \cdot 2\pi \cdot IQ \cdot IH = \frac{M}{2r^2} \cdot IH \cdot IQ \qquad (2)$$

Gravitationen herfra bevirker en mod S rettet kraft af størrelsen

$$\Delta F_{IH} = \cos(\theta) \cdot G \frac{\mu\, \Delta M_{IH}}{PI^2} = \frac{PE}{PS} \cdot G \frac{\mu M}{2r^2} \cdot \frac{IH \cdot IQ}{PI^2} \qquad (3)$$

Faktoren $\cos(\theta) = \frac{PE}{PS}$ er nødvendig, fordi det for hvert delelement af ringen kun er kraftens projektion på aksen PS, der tæller. En tilsvarende kraft ΔF_{KL} udgår fra den ring, der beskrives ved rotation af buestykket KL – og de to kræfter er lige store:

$$\Delta F_{KL} = \Delta F_{IH} \qquad (4)$$

Dette følger ved at ræsonnere som i forbindelse med figur 1. Der så vi på de smalle ensvinklede trekanter PIH og PKL og fandt, at kraften fra et lille areal mellem I og H er præcis lige så stor som kraften fra det tilsvarende areal mellem K og L overfor. I figur 2 er de smalle trekanter PIH og PKL stadig ensvinklede, og kræfterne fra tilsvarende arealer er derfor stadig lige store. Nu virker de blot i samme retning.

Mine fortsatte regninger

De to små trekanter IRH og LNK er begge ensvinklede med de "store" kongruente retvinklede trekanter SEI og SEL. Da de dermed også er indbyrdes ensvinklede, har vi

$$IH = \frac{RH}{SE} \cdot r \text{ og } KN = \frac{PL}{PI} \cdot RH \qquad (5)$$

Det andet af disse resultater betyder, at $\Delta\lambda$ (defineret i teksten til figur 2) kan skrives som

$$\Delta\lambda = \frac{RH}{2}\left(1 + \frac{PL}{PI}\right) = \frac{RH}{PI} \cdot \frac{PL+PI}{2} = \frac{RH \cdot PE}{PI} \qquad (6)$$

og det første betyder, at kraften fra (3) kan skrives som

$$\Delta F_{IH} = G \frac{\mu M}{2r} \cdot \frac{PE}{PS} \cdot \frac{IQ}{PI^2} \cdot \frac{RH}{SE}. \qquad (7)$$

Ved her at sætte $\frac{IQ}{PI} = \frac{SE}{PS}$ (begge brøker er lig $\sin(\theta)$) og indføre $\Delta\lambda$ fås

$$\Delta F_{IH} = G \frac{\mu M}{PS^2} \frac{\Delta\lambda}{2r} \qquad (8)$$

Intervallet $0 \leq \lambda \leq r$ deles nu i små intervaller $\Delta\lambda_i;\ i = 1,2,\ldots$ med samlet længde r. Fig. 2d viser, hvorledes de til delepunkterne svarende korder med aftagende længder $2\lambda_i;\ i = 1,2,\ldots$ ligger tæt og peger mod P. Ved at addere de til kordemellemrummene svarende kræfter kommer vi til følgende konklusion: Lad F_A betegne gravitationskraften fra de punkter på kugleoverfladen, hvis afstand fra P er mindre end PT, og lad F_B betegne kraften fra de øvrige. Der vil så gælde at

$$F_A = F_B = \frac{1}{2} G \frac{\mu M}{PS^2} \qquad (9)$$

Dermed er det ønskede resultat vist.

Om Newtons egen fortsættelse

Newton dividerer ΔF_{IH} fra (3) med det tilsvarende resultat for fig. 2b og får

$$\frac{\Delta F_{IH}}{\Delta F_{ih}} = \frac{PE}{PS} \cdot \frac{ps}{pe} \cdot \frac{pi^2}{PI^2} \cdot \frac{IH \cdot IQ}{ih \cdot iq} \qquad (10)$$

Ved en række ikke helt enkle overvejelser (med identiteten $df = \Delta F$ som nøglepunkt) får han dette resultat reduceret til

$$\frac{\Delta F_{IH}}{\Delta F_{ih}} = \frac{ps^2}{PS^2} \qquad (11)$$

Overvejelserne er nok for specielle her i bladet – vi nøjes med at konstatere, at ΔF_{IH} fra (7) ovenfor straks fører til samme resultat. Heraf kan man slutte, at kraften fra det i'te kordemellemrum i fig. 2d kan skrives som

$$\Delta F_i = \Delta k_i\, G \frac{\mu M}{RS^2} \qquad (12)$$

hvor Δk_i er en konstant, der afhænger af i. Og man kan så videre slutte, at den samlede kraft på μ i P kan skrives som

$$F = K \cdot G \frac{\mu M}{RS^2}, \text{ hvor } K = \Delta k_1 + \Delta k_2 + \ldots \qquad (13)$$

er en konstant med ubestemt værdi. Man må kunne vise, at værdien er $K = 1$ ved at se på den grænse, hvor μ og M er så langt fra hinanden, at de er at betragte som punktpartikler. Jeg kan imidlertid ikke finde et sted i *Principia*, hvor Newton gør sig tanker om bestemmelsen.

Principia er svær at læse

Sandsynligvis er det bare mig, der ikke er nok inde i datidens måde at formulere sig på – eller i den forsigtige måde, hvorpå Newton kredser om betydningen af begrebet masse overhovedet. Principia *er* simpelthen svær at læse nu om dage. Det er på tide, at jeg indrømmer, at jeg end ikke har fundet selve gravitationsformlen (1) i Principia. Det nærmeste jeg er kommet er flg. citat [2 s. 415]

> *In two spheres gravitating each towards the other, if the matters in places on all sides round about and equidistant from the centres is similar, the weight of either sphere towards each other will be inversely as the square of the distance between their centres.*

Faktisk er gravitation slet ikke nævnt i forbindelse med løsningen af dét centrale problem, jeg har beskrevet ovenfor. Newton skriver i meget generelle vendinger om ... *centripetal forces decreasing as the square of the distances* ... Det er som om han i [1] vil have nogle bredt anvendelige matematiske resultater på plads, inden han i [2] ser på gravitationen.

Selv om min fremstilling således nok er noget modificeret i forhold til Newtons egen, så føler jeg, at selve matematikken i alt væsentligt er nøje gengivet. Jeg er imidlertid amatør og modtager meget gerne kommentarer/rettelser.

Referencer

[1] Isaac Newton: *Principia*. Mottes translation revised by Cajori, Vol I, *The motion of Bodies* (til side 396).

[2] Vol II, *The system of the world* (side 397-680), University of California Press 1962.

[3] Emilio Segré: *From Falling Bodies to Radio Waves – Classical Physicists and their discoveries* (Freeman 1984). ◊