Massen af Jordens atmosfære

Af Ole Witt-Hansen, Køge Gymnasium.

Ved begyndelsen af dette skoleår fik jeg det tillidshverv at undervise to 1.g'ere i fysik og naturvidenskabeligt grundforløb. Blandt emnerne var: *Vand og Drivhuseffekt*. Umiddelbart gav det svage associationer til den aristoteliske fysik: Vand, luft, (ild og jord), men selv om 1.g'erne ingen indsigt overhovedet har til fysik efter Galilei og Newton, så var det nok alligevel ikke tanken.

Problemet var naturligvis drivhuseffekten. Jeg lærte selv i folkeskolen, at transmissionskoefficienten i glas er langt større i det optiske vindue end i det infrarøde område, og at det er grunden til, at drivhuset "holder på varmen".

Nu er det desværre lidt mere kompliceret, idet energitransport i gasser kan ske på 3 principielt forskellige måder: *Stråling, varmeledning* og *konvektion*. Ellers aner jeg intet om drivhuseffekt, bortset fra at det er noget, som beskæftiger verdens sværvægtere inden for klimaforskningen – bevæbnet med verdens allerkraftigste computere, uden at de er enige om at tolke resultaterne af modellerne.

Heldigvis har jeg *Den Store Danske Encyklopædi* stående på min reol, så jeg slog op i den, kun for at få bekræftet mine værste anelser. Det er allerhelvedes grotesk kompliceret. Ingen enkel forklaring kan give et blot nogenlunde plausibelt svar. I indledningen står f.eks., at drivhuseffekten ikke kan sammenlignes med opvarmningen i et drivhus.

Jeg har altid næret en modvilje mod at formidle noget, jeg dybest set ikke selv forstår, kun for at udnytte den fordel, at eleverne forstår endnu mindre. Så nv-projektet var noget af en opgave.

At det ikke var første gang, eleverne havde hørt om drivhuseffekt, opdagede jeg hurtigt, da jeg forsigtigt spurgte, om de vidste, hvad atmosfæren består af. Her kom svaret i begge klasser prompte: CO_2. Vel! Indholdet af CO_2 er ca. 360 ppm omkring 0,036%.

Så foreslog eleverne brint, så de har også hørt om brændselsceller. Ved at stille nogen meget ledende spørgsmål lykkedes det for nogle enkelte at foreslå ilt. Nitrogen havde ingen nogensinde hørt om.

Forløbet, som blev afviklet med en geografilærer og en biologilærer, udviklede sig efter min opfattelse ikke særlig gunstigt. Biologilæreren lavede et forsøg, hvor man belyste atm. luft og CO_2, og målte temperaturstigningen. Den var højest for CO_2, hvilket blev tolket som en forklaring på drivhuseffekten. Da eleverne spurgte mig, så mente jeg jo, at det muligvis kun viste, at varmefylden for CO_2 var mindre end for atm. luft, og hvis der endelig skete en større absorption i det optiske vindue, så ville det snarere levere en forklaring på den omvendte drivhuseffekt.

Kort sagt et begrebsmæssigt kaos, hvor faglærerne modsagde hinanden. Tre lærere formidlede noget forskelligt, som ingen af dem i øvrigt havde forstand på.

I denne malstrøm af vrøvleri begyndte jeg at spekulere på, hvorvidt der dog ikke var noget, som jeg vidste noget om, som man kunne regne på, og som havde relation til opvarmning af atmosfæren og drivhuseffekten.

Her er solarkonstanten 1,39 $^{kW}/_{m^2}$ naturligvis oplagt. Den kan beregnes ud fra overfladetemperaturen på Solen, er givet ved Wiens forskydningslov, og den samlede udstråling kan bestemmes ud fra Stefan Boltzmanns lov, begge kan udledes ud fra Plancks strålingslov. Solarkonstanten kan i øvrigt bestemmes eksperimentelt kalorimetrisk.

Den samlede indstråling til jorden finder man da ved at gange med πr_{jord}^2. Hvis man antager, at al stråling absorberes i atmosfæren, kan man f. eks. beregne temperaturstigningen af atmosfæren i løbet af et døgn, hvilket da kunne være interessant at vide.

Jeg har forsøgt at finde atmosfærens masse i opslagsværker på Internettet, men forgæves. Så opgaven var at bestemme massen af jordens atmosfære.

Til dette har man brug for en formel for trykkets afhængighed af højden y over jordoverfladen. Denne er givet ved udtrykket[1]:

$$p(y) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}y} \quad (1.1)$$

p_0 er trykket ved jordoverfladen lig med 1 atm. $M = 29$ g/mol er molmassen for luft. Endvidere indeholder formlen gaskonstanten R, tyngdeaccelerationen g og Kelvintemperaturen T.

For at lave beregningen skal vi endvidere kende rumfanget af en kugleskal med tykkelse dr, $dV = 4 \cdot \pi \cdot r^2 dr$.

Massen dm i denne kugleskal er $dm = \rho(y)dV$, hvor $\rho(y)$ betegner massefylden i højden y. Sammenhængen mellem y og r er $y = r - r_j$, hvor r_j er jordradius. Vi finder således:

$$m = \rho(y) \cdot 4\pi r^2 dr \quad (1.2)$$

Tilstandsligningen: $P\,V = n\,R\,T$ og $m = n\,M$ giver:

$$\rho(y) = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT}\,p(y) = \frac{M}{RT}\,p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}y}$$

Anvender man udtrykket (1.1) i beregningen, tager man ikke hensyn til temperaturfaldet i atmosfæren. Det er imidlertid muligt at udlede et udtryk for trykket i højden y, hvis man tager hensyn til temperaturfaldet. Dette er givet ved[1)]:

$$p(y) = p_0(1-\beta\,y)^{\frac{Mg}{293R\beta}} \quad \text{hvor } \beta = \frac{1}{293 \cdot 200}$$

Forskellen på de to udtryk er forsvindende for moderate højder, og de sidste udtryk besværliggør udregningen af de følgende integraler en del.

Vi kan nu opstille et udtryk for m_{atm}

$$m_{atm} = \int_{r_j}^{\infty} dm = 4\pi \frac{Mp_0}{RT} \int_{r_j}^{\infty} e^{-\frac{Mg}{RT}(r-r_j)} r^2 dr$$

Anvender man substitutionen

$$x = \frac{Mg}{RT}(r - r_j)$$

og sætter

$$\alpha = \frac{RT}{Mg},$$

finder man

$$r = \alpha\,x + r_j \text{ og } dr = \alpha dx.$$

Herefter bliver integralet:

$$m_{atm} = \int_{r_j}^{\infty} dm = 4\pi \frac{p_0}{g} \int_0^{\infty} e^{-x}(\alpha\,x + r_j)^2\,dx$$

For at udregne dette skal vi blot udregne de tre dimensionsløse integraler:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1 \wedge \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2 \wedge \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1\,,$$

som giver resultatet:

$$m_{atm} = 4\pi \frac{p_0}{g}(2\alpha^2 + r_j^2 + 2\alpha\,r_j)$$

Indsætter man $T = 273$ K, $M = 29$ g/mol, $R = 8{,}31$ J/mol·K, $g = 9{,}82$ m/s², $r_j = 6370$ km og $p_0 = 105$ N/m², finder man

$$\alpha = \frac{RT}{Mg} = 7{,}97 \cdot 10^4 \text{ m}$$

og sluttelig:

$$M_{atm} = 5{,}19 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

Sammenligner man med jordens masse:

$$M_j = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

skulle atmosfæren være knap en milliontedel af jordens masse. En værdi, som man ikke på forhånd kan afvise, men hvis nogen er i stand til at bekræfte eller afkræfte denne værdi, vil jeg meget gerne høre det.

Man kan så beregne, hvor meget temperaturen af atmosfæren i gennemsnit ville stige pr. døgn, hvis der ikke var en strålingsudveksling med verdensrummet:

$$c_p(\text{ilt}) = 0{,}92 \text{ kJ/kg·K},$$
$$c_p(\text{nitrogen}) = 1{,}04 \text{ kJ/kg·K},$$
$$c_p(\text{luft}) = (0{,}21 \cdot 0{,}92 + 0{,}79 \cdot 1{,}04) \text{ kJ/kg·K} = 1{,}01 \text{ kJ/kg·K}.$$

Den indstrålede effekt er

$$P_{sol} = 1{,}39 \text{ kW/m}^2 \cdot \pi \cdot r_j^2 = 1{,}77 \cdot 10^{17} \text{ W}.$$

I løbet af et døgn:

$$\Delta E = 24 \cdot 3600 \cdot 1{,}77 \cdot 10^{17} \text{ J} = 1{,}53 \cdot 10^{22} \text{ J}.$$

$$\Delta E = c_P \cdot P \cdot m_{atm} \cdot \Delta T \quad \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\Delta E}{c_P \cdot m_{atm}} = 2{,}9\ ^oC$$

I gymnasial sammenhæng mener jeg, at elevernes faglige udbytte af det naturvidenskabelige grundforløb stort set er lig med nul. Mit udbytte var blandt andet ovenstående beregning, som jeg ikke tidligere har set, men jeg har naturligvis ikke præsenteret eleverne for denne beregning. ◊

[1)] De to formler for trykkets afhængighed af højden er udledt i et valgfrit emne: *Fysikkens differentialligninger*, jeg har skrevet, men i hvert fald den første kan findes i mange lærebøger.