Banekurver i r^{-2} felter – en simpel udledning

Af Jens Ejsing, Aalborg Katedralskole.

I 1964 holdt afdøde Richard Feynmann en gæsteforelæsning for førsteårsstuderende på Caltech med titlen *The Motion of the Planets Around the Sun*. I forelæsningen behandlede Feynmann problemet ved hjælp af Newtons geometriske metoder, men modificerede dem på visse punkter, hvor han ikke kunne følge Newtons argumentation. I mange år troede man, at Feynmanns noter til denne forelæsning var gået tabt, men ca. 30 år efter lykkedes det at rekonstruere forelæsningen, som nu findes i bogform med titlen *Feynman's Lost Lecture*.

I den del af forelæsningen, hvor Feynmann viste, at Newtons 2. lov sammen med gravita-tionsloven fører til Keplers 1. lov, erstatter han Newtons konstante tidstilvækster Δt med konstante vinkeltilvækster $\Delta\theta$. Herved nåede han meget let frem til, at planetbanernes hodografer er cirkler. En hodograf er grafen for vektorfunktionen $\vec{v}(\theta)$. Hans andet trick var at udnytte sammenhængen mellem en ellipse og dens ledecirkel. Han drejede hodografen 90° og fik herved en ny cirkel. Han viste så, at banekurven er ligedannet med en ellipse, der har cirklen som ledecirkel, dvs. banekurven er en ellipse.

Elegant – men ikke simpel

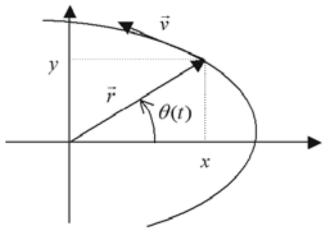
Feynmann brugte kun elementære geometriske argumenter, men der er mange led i kæden så udledningen forekommer elegant, men ikke simpel. Ideen med at bruge $\vec{v}(\theta)$ som mellemstation på vejen til banekurven kan imidlertid gøres til en let genvej, hvis den kombineres med lidt gymnasiematematik. Metoden virker for ethvert kraftfelt af formen

(1) $$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

Antag, at vi har fået udledt, at banekurven ligger i en plan, som vi nu vælger som koordinatplan med kraftcentret liggende fast i origo, samt at størrelsen

(2) $$\ell = \det(\vec{r},\vec{v}) = r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Figur 1:



er konstant. Ser vi på baneplanen fra den side, hvor bevægelsen foregår i positiv omløbsretning, kan ℓ efter forgodtbefindende tolkes som den dobbelte arealhastighed eller det specifikke bevægelsesmængdemoment.

For at finde funktionen $\vec{v}(\theta)$, hvor θ er en voksende funktion af t, kombineres (1) med Newtons 2. lov.

(3) $$m\frac{d\vec{v}(\theta(t))}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

som omskrives

(4) $$m\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{\alpha}{r^2}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$$

Nu skal vi blot dividere begge sider med m og $d\theta/dt$ og bruge (2) til at eliminere den sidste størrelse og har så:

(5) $$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{\alpha}{m\ell}\begin{pmatrix}-\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

At bestemme funktionen $\vec{v}(\theta)$ er nu blot et spørgsmål om at bestemme stamfunktioner til $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$:

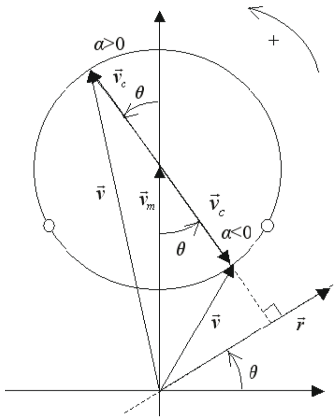
(6) $$\begin{pmatrix}v_x(\theta)\\ v_y(\theta)\end{pmatrix} = \frac{\alpha}{m\ell}\begin{pmatrix}-\sin(\theta)+e_x\\ \cos(\theta)+e_y\end{pmatrix}$$

hvor e_x og e_y er integrationskonstanter. Hodografen er altså en cirkel med radius $v_c = |\alpha|/(m\ell)$ og centrum i

(7) $$\frac{\alpha}{m\ell}\begin{pmatrix}e_x\\ e_y\end{pmatrix} = \frac{\alpha\, e}{m\ell}\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}$$

hvor $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$, og ω angiver retningen fra origo til centrum. En ændring af ω giver blot en drejning af hodografen og den tilhørende banekurve og er derfor uden betydning for banekurvens form og størrelse. Det er bekvemt at vælge ω så hodografen får centrum på den positive del af 2. aksen eller i origo. Vi har så:

Figur 2:



(8) $$\begin{pmatrix} v_x(\theta) \\ v_y(\theta) \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{m\ell}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} + \frac{|\alpha|}{m\ell}\begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

Denne formel viser, at $\vec{v}(\theta)$ har formen

(9) $$\vec{v}(\theta) = \vec{v}_c(\theta) + \vec{v}_m$$

hvor $\vec{v}_m$ er konstant, og den variable del $\vec{v}_c(\theta)$ er π/2 foran $\vec{r}(\theta)$, når feltkraften er tiltrækkende (α >0) og π/2 bagefter, når feltkraften er frastødende (α < 0) – se fig. 2, der viser situationen for e >1. Hvis vi nu beregner *l* ved hjælp af hodografen får vi:

(10) $$\begin{aligned} \ell &= \det(\vec{r},\vec{v}) = \det(\vec{r},\vec{v}_c) + \det(\vec{r},\vec{v}_m) \\ &= \pm r \cdot v_c + r \cdot v_m \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right) \Leftrightarrow 0 \\ \ell &= \pm\frac{|\alpha|}{m\ell} r + \frac{|\alpha| e}{m\ell} r\cos(\theta) \end{aligned}$$

som hurtigt omskrives til:

(11) $$r(\theta) = \frac{p}{e\cos(\theta) \pm 1} \quad \text{hvor} \quad p = \frac{m \cdot \ell^2}{|\alpha|}$$

hvor + skal bruges, når α > 0 og -, når α < 0. Dette er den kendte forskrift i polære koordinater for et keglesnit med brændpunkt i origo, excentricitet *e*, geometrisk parameter *p* og 1. aksen som symmetriakse.

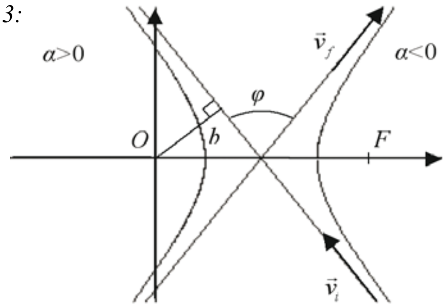
Betingelser

0≤*e*<1 forudsætter $\alpha > 0$, da *r(θ)* ellers bliver negativ for alle værdier af *θ*. Banekurverne er ellipser med kraftcentret i det ene brændpunkt, og på hodografen ligger origo inden i cirklen. Når *θ* gennemløber et interval af længden 2*π*, gennemfører stedvektorens endepunkt et fuldt omløb på ellipsen samtidig med, at hastighedsvektoren gennemfører et helt omløb på den cirkelformede hodograf.

$e = 1$ forudsætter også, at $\alpha > 0$. Banekurverne er parabler med kraftcentret i brændpunktet og på hodografen ligger origo på cirkelperiferien. Når θ gennemløber intervallet]-π,π[, gennemløber stedvektorens endepunkt parablen, medens hastighedsvektoren gennemløber cirklen undtagen origo.

Når $e > 1$ og $\alpha > 0$, er θ begrænset af betingelsen $e \cdot \cos(\theta)+1 > 0$. Banekurven bliver i denne situation den hyperbelgren, der har kraftcentret i brændpunktet, og hodografen består af den øvre del af cirklen mellem de to boller på fig. 2. Hvis $\alpha < 0$ er betingelsen, at $e \cdot \cos(\theta)-1>0$, og banekurven bliver nu den anden hyperbelgren med brændpunkt i F på fig. 3 medens, hodografen nu består af den nedre del af cirklen på fig. 2.
Ved hjælp af (8) og (11) og de kendte formler for keglesnit er det nu let at udlede en række formler. Hvis vi f.eks. vil se på energiforholdene, giver (8) efter lidt reduktion:

Figur 3:



$$(12)\qquad v^2 = \left(\frac{\alpha}{m\ell}\right)^2 \cdot (1+e^2 \pm 2e\cos(\theta)) = \frac{|\alpha|}{m\,p}(1+e^2 \pm 2e\cos(\theta))\,.$$

Hvis vi nu bruger (11) til at eliminere $\cos(\theta)$ fås:

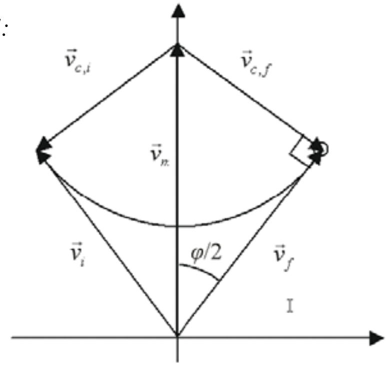
$$(13)\qquad v^2 = \frac{|\alpha|}{m\,p}(e^2-1) + \frac{2\alpha}{m\,r} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{|\alpha|(e^2-1)}{2p},$$

hvor højre side i den nederste ligning er den konstante mekaniske energi E.

Rutherfords spredningsformel

Da Feynmann var færdig med at demonstrere sammenhængen mellem Keplers og Newtons love, havde han et par minutter til overs – de blev så brugt til at vise, hvorledes Rutherfords spredningsformel kan udledes ved at udnytte hodografen. Den fysiske del af problemet består i at få etableret en sammenhæng mellem stødparameteren b og spredningsvinklen φ for en givet mekanisk energi E. Partiklen kommer fra det uendeligt fjerne med hastigheden $\vec{v}_i$ og slutter i det uendeligt fjerne med hastigheden $\vec{v}_f$ med $v_f = v_i$. Spredningsvinklen φ er lig ned vinklen mellem de to vektorer – se fig. 3 og 4.

Figur 4:



Af fig. 4 ses, at

$$(14)\qquad \tan(\tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{v_c}{v_f} = \frac{v_c}{v_i} = \frac{\alpha}{mlv_i}$$

Desuden har vi jf. fig. 3 at $\ell = b \cdot v_i$, som indsættes i (14) sammen med $E = \frac{1}{2}mv_i^2$, hvorefter b isoleres:

$$(15)\qquad b = \frac{\alpha}{2E\tan(\frac{1}{2}\varphi)}$$

En stødparameter mindre end b giver en spredningsvinkel, der er større end φ, så arealet

$$(16)\qquad \sigma(\varphi) = \pi b^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\tan^2(\frac{1}{2}\varphi)}$$

angiver tværsnittet for spredning til vinkler, der er større end φ. Herefter er det ren matematik at finde det differentielle tværsnit:

$$(17)\qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi\sin(\varphi)}\left|\frac{d\sigma}{d\varphi}\right| = \frac{\alpha^2}{16E^2\sin^4(\frac{1}{2}\varphi)}$$

Litteratur:

[1] David L. Goodstein & Judith R. Goodstein: *Feynman's Lost Lecture: The Motion of the Planets Around the Sun.*

[2] Børge L. Nielsen: *Note om hodografer for Keplerbaner*. LMFK-bladet nr. 5 2004. ♦