Opgave 35

Vi vil se på en funktion af typen

#1: $f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Første opgave er at bestemme placeringen af grafens vendetangent. Dette gøres ved at sætte funktionens dobbeltafledede lig nul

#2: $$\frac{d}{dx}(a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)$$

#3: $$3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

#4: $$\frac{d}{dx}(3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c)$$

#5: $$6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$$

#6: $6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b = 0$

#7: SOLVE($6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b = 0$, x)

#8: $$x = -\frac{b}{3 \cdot a}$$

Så har vi beregnet førstekoordinaten til det punkt, hvor grafen har et en vendetangent. Vi skal også bruge andenkoordinaten:

#9: $$f\left(-\frac{b}{3 \cdot a}\right)$$

#10: $$-\frac{b \cdot c}{3 \cdot a} + \frac{2 \cdot b^3}{27 \cdot a^2} + d$$

Vi parallelforskyder nu grafen således, at punktet med vendetangenten bliver origo. Vi vil altså parallelforskyde punktet $\left(\frac{-b}{3a}, -\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right)$ i origo. Vi skal altså forskyde $\frac{b}{3a}$ enheder i vandret retning og $-\left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right)$ enheder i lodret retning.

#11: $$f\left(x - \frac{b}{3 \cdot a}\right) - \left(-\frac{b \cdot c}{3 \cdot a} + \frac{2 \cdot b^3}{27 \cdot a^2} + d\right)$$

#12: $$\frac{x\cdot(3\cdot a^2\cdot x^2 + 3\cdot a\cdot c - b^2)}{3\cdot a}$$

#13: $$a\cdot x^3 + x\cdot\frac{3\cdot a\cdot c - b^2}{3\cdot a}$$

Nu kan vi se, at regneforskriften er blevet af på en form, som svarer til de tre typer, som præsenteres først i opgave 35 i hæftet. Da de tre typer alle er ulige funktioner, kan vi konkludere, at punktet med vendetangenten er et symmetripunkt for grafen.

Det vil være fortegnet på koefficienten til førstegradsleddet (lad os kalde den *k*), som bestemmer, hvilken type funktionen er. Hvis *k* og *a* har samme fortegn, er funktionen monoton. Hvis $k = 0$, så vil funktionens graf have en vandret vendetangent, men funktionen vil stadig være monoton. Hvis *k* og *a* har modsat fortegn, vil funktionen have et lokalt maksimum og et lokalt minimum, og der er mulighed for, at *f* har mere end en rod. Dette vil blive afgjort af *d*, som jo parallelforskyder grafen op eller ned. Læg mærke til at *k* ikke afhænger af *d*.
Hvis vi i det sidste tilfælde gerne vil afgøre, om der er 1,2 eller 3 rødder, så skal vi op og have fat i den førsteafledede funktion i #3 igen. Nulpunkterne for den afledede giver os placeringen af de lokale ekstrema; lad os kalde dem $x_{\min}$ og $x_{\max}$. Der vil således være 3 rødder, hvis dobbeltuligheden $f(x_{\min}) < 0 < f(x_{\max})$ er opfyldt. Der vil være to rødder, hvis $f(x_{\min}) = 0$ eller $f(x_{\max}) = 0$. Ellers vil der kun være en rod. Så ved at regne videre, kan vi finde nogle klare kriterier for, hvor mange rødder et tredjegradspolynomium har. Dette vil jeg imidlertid overlade til læseren som opgave 35a .

#14: $$k := \frac{3\cdot a\cdot c - b^2}{3\cdot a}$$

#15: $$\frac{3\cdot a\cdot c - b^2}{3\cdot a} > 0$$

#16: $$\text{SOLVE}\left(\frac{3\cdot a\cdot c - b^2}{3\cdot a} > 0,\ [a, b, c]\right)$$

#17: $$\frac{3\cdot a\cdot c - b^2}{a} > 0$$

Lad os sætte $a = 1$. Alle tredjegradsligninger kan jo omskrives, så $a = 1$.

#18: $\frac{3\cdot 1\cdot c - b^2}{1} > 0$

#19: $\text{SOLVE}\left(\frac{3\cdot 1\cdot c - b^2}{1} > 0, [c, b]\right)$

#20: $3\cdot c - b^2 > 0$

Så i tilfældet $a = 1$, afgøres antallet af rødder af fortegnet på $b^2 - 3c$. Dette er nu ikke så overraskende idet dette er lig med $4 \cdot$ diskriminanten af den afledede funktion i #3.