Eksperiment 36

Dette dokument viser, hvorledes eksperiment 36 for eksempel kunne gennemføres.
Vi vil se på et generelt 4.gradspolynomium:

#1: $f(x) := a\cdot x^4 + b\cdot x^3 + c\cdot x^2 + d\cdot x + e$

Lad os spejle grafen i den lodrette linie med ligningen $x = m$:

#2: $f(-x + 2\cdot m)$

#3: $a\cdot x^4 - x^3\cdot(8\cdot a\cdot m + b) + x^2\cdot(24\cdot a\cdot m^2 + 6\cdot b\cdot m + c) - x\cdot(32\cdot a\cdot m^3 + 12\cdot b\cdot m^2 + 4\cdot c\cdot m + d) + 16\cdot a\cdot m^4 + 8\cdot b\cdot m^3 + 4\cdot c\cdot m^2 + 2\cdot d\cdot m + e$

Lad os kræve at den nye graf skal være lig den gamle:

#4: $f(-x + 2\cdot m) - f(x) = 0$

#5: $-2\cdot x^3\cdot(4\cdot a\cdot m + b) + x^2\cdot(24\cdot a\cdot m^2 + 6\cdot b\cdot m) - 2\cdot x\cdot(16\cdot a\cdot m^3 + 6\cdot b\cdot m^2 + 2\cdot c\cdot m + d) + 16\cdot a\cdot m^4 + 8\cdot b\cdot m^3 + 4\cdot c\cdot m^2 + 2\cdot d\cdot m = 0$

Denne ligning skal altså gælde for alle *x*. Dvs. at alle koefficienterne må være lig 0. Dette giver os 4 ligninger.

#6: $4\cdot a\cdot m + b = 0 \wedge 24\cdot a\cdot m^2 + 6\cdot b\cdot m = 0 \wedge 16\cdot a\cdot m^3 + 6\cdot b\cdot m^2 + 2\cdot c\cdot m + d = 0 \wedge 16\cdot a\cdot m^4 + 8\cdot b\cdot m^3 + 4\cdot c\cdot m^2 + 2\cdot d\cdot m = 0$

#7: $16\cdot a\cdot m^4 + 8\cdot b\cdot m^3 + 4\cdot c\cdot m^2 + 2\cdot d\cdot m = 0 \wedge 16\cdot a\cdot m^3 + 6\cdot b\cdot m^2 + 2\cdot c\cdot m + d = 0 \wedge 24\cdot a\cdot m^2 + 6\cdot b\cdot m = 0 \wedge 4\cdot a\cdot m + b = 0$

m kan bestemmes af den sidste ligning:

#8: $4\cdot a\cdot m + b = 0$

#9: SOLVE$(4\cdot a\cdot m + b = 0,\ m)$

#10: $$m = -\frac{b}{4\cdot a}$$

Denne værdi for *m* indsættes nu i de andre ligninger:

$$\#11:\quad 16\cdot a\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^4+8\cdot b\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^3+4\cdot c\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^2+2\cdot d\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)=$$

$$0\ \wedge\ 16\cdot a\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^3+6\cdot b\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^2+2\cdot c\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)+d=0\ \wedge$$

$$24\cdot a\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)^2+6\cdot b\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)=0\ \wedge\ 4\cdot a\cdot\left(-\frac{b}{4\cdot a}\right)+b=0$$

$$\#12:\quad -\frac{b\cdot c}{2\cdot a}+\frac{b^3}{8\cdot a^2}+d=0\ \wedge\ -\frac{b\cdot d}{2\cdot a}+\frac{b^2\cdot c}{4\cdot a^2}-\frac{b^4}{16\cdot a^3}=0\ \wedge\ 0=0$$

Det ses, at en af ligningerne automatisk er opfyldt for den fundne værdi for *m*. De to andre ligninger undersøges nærmere.

$$\#13:\quad -\frac{b\cdot c}{2\cdot a}+\frac{b^3}{8\cdot a^2}+d=0\ \wedge\ -\frac{b\cdot d}{2\cdot a}+\frac{b^2\cdot c}{4\cdot a^2}-\frac{b^4}{16\cdot a^3}=0$$

$$\#14:\quad 8\cdot a^2\cdot\left(-\frac{b\cdot c}{2\cdot a}+\frac{b^3}{8\cdot a^2}+d\right)=0\ \wedge\ 16\cdot a^3\cdot\left(-\frac{b\cdot d}{2\cdot a}+\frac{b^2\cdot c}{4\cdot a^2}-\frac{b^4}{16\cdot a^3}\right)$$

$$=0$$

Da $a\neq 0$ skal følgende to ligninger (som fås ved at gange igennem med fællesnævneren) være opfyldt:

$$\#15:\quad -b\cdot(8\cdot a^2\cdot d-4\cdot a\cdot b\cdot c+b^3)=0\ \wedge\ 8\cdot a^2\cdot d-4\cdot a\cdot b\cdot c+b^3=0$$

Udtrykket på venstre side i 2. ligning er lig en af faktorerne i 1. ligning.
Af anden ligning ses, at hvis $b=0$, så er også $d=0$, og dermed bliver $x=0$ ligningen for den lodrette symmetriakse.
Hvis $b\neq 0$ giver 2. ligning et kriterium for om grafen har en lodret symmetriakse eller ej.
Hvis ligningen er opfyldt vil $x=\dfrac{-b}{4a}$ være en lodret symmetriakse for *f*'s graf.

Her prøves resultatet af på et konkret eksempel:

#16: $g(x) := 2\cdot x^4 - 3\cdot x^2 + 7$

g er en lige funktion. Lad os parallelforskyde grafen for *g*:

#17: $g(x - 4)$

#18: $2\cdot x^4 - 32\cdot x^3 + 189\cdot x^2 - 488\cdot x + 471$

Har den funktions graf en lodret symmetriakse? Vi tjekker kriteriet!

#19: $8\cdot 2^2\cdot 488 - 4\cdot 2\cdot 32\cdot 189 + 32^3$

#20: 0

Ja, minsandten. Hvad er så *m*?

#21: $\dfrac{32}{4\cdot 2}$

#22: 4

Altså er $x = 4$ en lodret symmetriakse for grafen.