Vitruv, arkitektur og matematik

Kristian Danielsen, ekstern lektor, Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet

Da filosoffen Aristippos, der var elev af Sokrates, under et skibsbrud var blevet kastet i land på kysten af Rhodos og bemærkede, at der var tegnet geometriske figurer, skal han have råbt følgende til sine ledsagere: "Der er håb for os. Jeg ser spor efter mennesker."

(Vitruv, 2016, s. 233)

Citatet stammer fra Vitruvs værk *Om Arkitektur*. Man kan se den latinske udgave af teksten nederst på Figur 1, mens selve billedet er lavet af den hollandske illustrator Michael Burghers. Billedet med citatet har været brugt som frontispice (illustration forrest i en bog) til flere forskellige værker – både en udgave af Euklid fra 1703, en udgave af Apollonios fra 1710, som denne illustration viser, og en udgave af Archimedes fra 1792. I de forskellige udgaver har man blot udskiftet de geometriske figurer.

Citatet (og billedet) kan fortælle os nogle interessante ting, idet det siger noget om matematikkens rolle: Aristippos og hans kammerater ved, at de er reddet – de er ikke strandet blandt uciviliserede vilde, men er endt på en strand, der viser sikre tegn på civilisation – nemlig matematik. Vi får her et indblik i det image, som matematik havde (og har) – nemlig et tegn på civilisation og dannelse. Citatet giver os også et fingerpeg om, hvor vi kan finde kilder, der kan belyse matematikkens image, rolle og anvendelse i antikken. Vi skal ikke kigge i de store græske matematikeres værker, men i stedet i en bog om arkitektur, nemlig i Vitruvs *Om Arkitektur*.

Den romerske arkitekt Vitruv, der levede samtidig med Cæsar og Augustus, skrev værket *Om Arkitektur*, som er det eneste værk om arkitektur, der er blevet overleveret fra antikken til i dag. Vitruv skriver om arkitektens arbejdsområder, der dækker opførelsen af bygninger (huse, templer, byplaner, osv.), konstruktion af ure og konstruktion af maskiner. Vitruv skriver desuden om de områder, som arkitekten også skal have kendskab til. Her bliver

Figur 1
Frontispice til Apollonios af Michael Burghers, 1710. Her gengivet efter Heath 1896/1961

det interessant for matematiklærere, da matematik er et af de centrale områder, som en arkitekt skal vide noget om. *Om Arkitektur* er blevet oversat til dansk og udkom i en meget flot udgave sidste år (Vitruv, 2016), og I kan sikkert allerede finde den på skolens bibliotek under oldtidskundskabsbøger.

Normalt forbinder vi ikke romere med store matematiske opdagelser, og det er heller ikke derfor, vi skal læse *Om Arkitektur*. Vitruv skriver derimod om anvendelsen af matematik, matematikkens image og de store matematiske forbilleder. Den matematik, som Vitruv refererer til, er den græske matematik, og det er de græske matematikere, han beskriver: Pythagoras, Platon, Archimedes, Archytas og Eratosthenes – Vitruv nævner dog aldrig Euklid!

Den græske matematik kan være rigtig interessant at bruge i undervisningen, fx kan Euklids *Elementer* være fantastiske til at illustrere matematikkens aksiomatisk deduktive struktur, fx med udgangspunkt i (Glunk, 2006). Men den græske matematik har også sine udfordringer. Hvis man, fx i forbindelse med SRP eller tværfagligt samarbejde, er interesseret i matematikkens anvendelse og matematikkens sammenhæng med den antikke kultur, er der ikke meget hjælp at hente hos Euklid. Euklid skriver nemlig intet om anvendelsen af sin matematik; i *Elementerne* er det kun definitioner og sætninger. Her kan den nye oversættelse af Vitrurv måske bidrage med kilder, der sætter matematikken i en kontekst. Jeg har desuden sammen med *Henrik Kragh Sørensen* udgivet et undervisningsmateriale om Herons formel (Danielsen og Sørensen, 2016), der også kan bidrage til at belyse denne sammenhæng.

Om Arkitektur er et stort og omfattende værk, og det kan være uoverskueligt at kaste sig over. Jeg vil i det følgende prøve at give et indblik i nogle af de steder, der kan være interessante for en matematiklærer. Jeg kommer ikke omkring alt det, Vitruv skriver om matematik, men jeg vil fremdrage nogle af de ting, jeg finder særligt relevante.

Anvendelse og dannelse

For at dette emne [indstilling af kastemaskiner] *skal blive til at gå til, også for dem, der ikke kender til geometri, så at de ikke i krig bliver forsinket af beregninger i farens stund, vil jeg fremlægge, hvad jeg selv i praksis har fået sikkert kendskab til, og delvis hvad jeg har lært af mine lærere.*

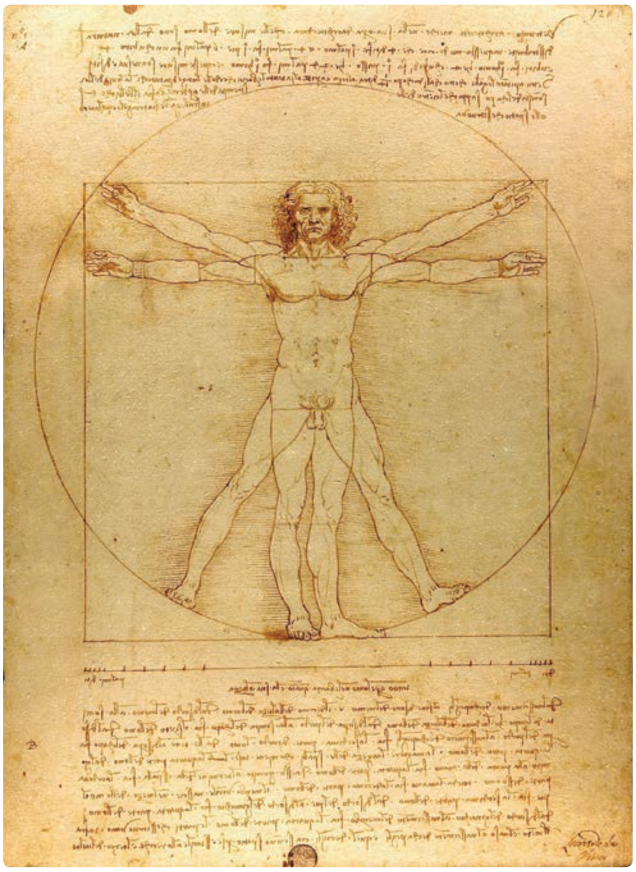
(Vitruv, 2016, s. 402)

Ovenstående citat stammer fra 10. bog af *Om arkitektur*, hvor Vitruv skriver om krigsmaskiner. Her ses det tydeligt, at livet som romersk arkitekt kan være meget barskt. Man kan ende i en situation, hvor det er livsnødvendigt at kunne anvende matematisk viden. Det er altså i høj grad matematikkens praktiske side, der her er i fokus.

I *Om Arkitektur* begynder Vitruv med at beskrive arkitektens uddannelse (Vitruv, 2016, s. 46 – 55). Uddannelsen skal omfatte en lang række områder bl.a. litteratur, tegning, filosofi, historie og medicin – og så skal den også omfatte matematik:

Geometrien yder arkitekturen megen hjælp: Først og fremmest er anvendelsen af passer og lineal en nyttig ting, hvorved man let kan tegne bygninger på tegnebrættet og anbringe rette vinkler samt vandrette og lodrette linjer korrekt. … Med aritmetik beregnes byggeudgifter og proportionsforhold, og vanskelige problemer, der vedrører modulforhold, løses ved hjælp af geometriske beregninger og metoder.

(Vitruv, 2016, s. 47)



Figur 2: Den vitrianske mand af Leonardo Da Vinci, ca. 1490. Foto: Luc Viatour

Gennem matematik kan arkitekten både lære simple ting som at kunne håndtere passer og lineal, når han skal tegne bygninger – og mere komplicerede ting, der handler om modulforhold. Når Vitruv skriver modulforhold mener han forholdene mellem de enkelte elementer i en bygning – f.eks. søjletykkelse ift. søjlehøjde.

Vitruv fortsætter sin beskrivelse af arkitektens uddannelse:

… den mand, som har et rimeligt kendskab til de forskellige videnskabsgrene og til de videnskabelige teorier, som er nødvendige for arkitekturen, han har altså sandsynligvis lært tilstrækkeligt: han vil ikke komme til kort, hvis man skal vurdere og efterprøve noget inden for disse emner og kunstarter.

(Vitruv, 2016, s. 54)

Uddannelsen handler om at lære ting, der er nyttige og samtidig give arkitekten et bredt indblik i forskellige områder. Det er dog ikke meningen, at arkitekten skal blive ekspert i et enkelt område:

De, som af naturen er så begavede og skarpsindige og husker så godt, at de er i stand til at opnå et dybtgående kendskab til geometri, astronomi, musik og til andre fag, de rækker ud over arkitektens opgaver og bliver de rene forskere. [1)]

(Om Arkitektur s. 54)

[1)] I den danske oversættelse har man brugt ordet forskere, mens der i den latinske tekst står mathematici – som også kunne oversættes med matematikere (se fx Cuomo, 2001, s. 160).

For Vitruv er anvendelse vigtig, men arkitekten skal ikke kun være en praktiker, og han skal heller ikke være en ekspert på et enkelt område, men et sted midt i mellem – videnskabshistorikeren Serafina Cuomo kalder Vitruvs arkitekt en ”gentleman technician” (Cuomo, 2001, s. 160) – vi kunne måske kalde det en almen dannet praktiker på dansk.

De rette forhold

Hvis man lægger et menneske på ryggen med arme og ben spredt ud og anbringer det ene passerben i dets navle og slår en cirkel, så vil linjen ramme begge hænders fingerspidser og begge tåspidser. Ligesom kroppen kan danne grundlag for en cirkel, således kan man også finde en kvadratisk figur i den.

(Vitruv, 2016, s. 132).

Det ovenstående citat er måske det mest kendte fra *Om Arkitektur*. Hvis man ikke lige kan se det for sig, kan man kigge på Figur 2, hvor man kan se Leonardo da Vincis vitruvianske mand, hvor Leonardo netop har illustreret dette citat. Det stammer fra 3. bog, kap. 1 (Vitruv, 2016, s. 130 – 134), hvor Vitruv skriver om ”De rette proportionsforhold og perfekte tal”. Vitruv beskriver de forskellige forhold, der er i kroppen – fx at ansigtet og hånden er en tiendedel af kropshøjden og foden er en sjettedel.

Man kan finde flere eksempler på, at det gyldne snit bliver sat i forbindelse med Vitruvs forhold og Leonardos tegning. Der er dog ikke noget, der tyder på, at Vitruv bruger det gyldne snit. Hvis man fx ser på Vitruvs forhold, er de alle sammen pæne forhold mellem hele tal. Hvis man vil læse mere om misforståelserne om det gyldne snit, kan man fx se (Andersen og Laursen, 2011).

Ved at lade sig inspirere af de forhold, der findes i kroppen, kan arkitekterne skabe smukke bygninger:

På samme måde bør templerne have et proportionssystem i de enkelte dele, der er afpasset hele storheden i det samlede værk.

(Vitruv, 2016, s. 132)

Vitruv fortsætter kapitlet med at beskrive, hvordan man bruger kroppen som målestok (fod, alen, osv.). I resten af 3. bog og i 4. bog beskriver Vitruv forskellige tempeltyper, hvor han inddrager modultænkningen. Søjletykkelsen udgør grundmodulet, som man kan afstemme resten af templet efter – både templet som helhed, hvor længde og bredde kan bestemmes som et bestemt antal moduler, og de enkelte dele, der måles i dele af modulet. I kapitel 5 i 3. bog (Vitruv, 2016, s. 146 – 147) beskriver Vitruv den joniske orden, herunder beskriver han konstruktionen af volutterne (den spiralformede udsmykning øverst på søjlen). Hvis man vil fordybe sig i denne konstruktion, og se hvordan den er blevet lavet af andre arkitekter, kan man finde og læse mere i (Grøn, 2016, s. 87 – 91), hvor der også er forslag til et projekt om emnet.

I 3. bog kapitel 1 beskriver Vitruv også det perfekte eller fuldkomne tal. Han giver to bud på det perfekte tal: 10 og 6. Det var folk i gamle dage, der udnævnte 10 til det perfekte tal, og iflg. Vitruv bygger det på, at vi har 10 fingre. 6 derimod er matematikernes bud på det perfekte tal, fordi 6 ”har underinddelinger, der korresponderer til tallet seks” (Vitruv, 2016, s. 133). Romernes tilgang til denne diskussion er mere praktisk – iflg. Vitruv smelter romerne de to tal sammen, og får 16 som deres perfekte tal. Det kan man fx se ved, at en denar deles i 16 as (Vitruv, 2016, s. 134). Vitruv nævner ikke pythagoræerne her, og Euklid nævnes, som sagt, slet ikke af Vitruv. Men vi ved, at pythagoræerne tillagde 10 en stor betydning, da 10 kan lægges op som fire rækker med henholdsvis 1, 2, 3 og 4 sten og dermed danne en ligesidet trekant. Hos Euklid finder vi definitionen på et fuldkomment tal i definition 22 i bog 8 af *Elementerne*: ”Et fuldkomment Tal er et, som er lig sine egne Dele tilsammen.” (Euklid, 1912, s. 5). Både når Vitruv skriver ”underinddelinger”, og Euklid skriver ”dele”, drejer det sig om divisorer, og 6 er netop summen af 1, 2 og 3. Det er fra Euklid, vi har overtaget definitionen af fuldkomne tal.

De sande helte

Disse store mænds [Platon, Pythagoras, Archimedes osv.] *tanker ligger altså klare til brug, ikke bare til forbedring af vores livsførelse, men slet og ret til gavn for alle mennesker, og det gør de for tid og evighed. Sportsmændenes berømmelse forældes derimod lige så hurtigt, som deres krop ældes. Så hverken når de er på deres højdepunkt eller efter deres død, kan de gavne menneskelivet, som de vises tanker kan.*

(Vitruv, 2016, s. 345)

Vitruv sammenligner de store tænkere med de store sportsfolk, og det undrer ham, at det kun er sportsfolk, der får tildelt store æresbevisninger, mens store forfattere ikke hædres. Han finder det ikke rimeligt:

Fordi sportsmændene kun gør deres øvelser for at styrke deres egen krop; forfatterne styrker derimod forstanden, og endda ikke blot deres egen, men også alle andres, når de i deres bøger giver anvisninger på, hvordan man lærer mere og øger sin skarpsindighed.

(Vitruv, 2016, s. 341)

I forordet til 9. bog finder man fire eksempler på matematikere og deres geniale løsninger på problemer, der kan inspirere eftertiden.

Det første eksempel er Platons konstruktion af et kvadrat, der er dobbelt så stort som et givent kvadrat: Hvad gør man, hvis man har en kvadratisk mark og ønsker en ny kvadratisk mark med det dobbelte areal? Vitruv beskriver vanskeligheden i denne opgave:

Hertil er der brug for en slags tal, der ikke kan findes ved hjælp af multiplikation (aritmetisk), og derfor finder man

det ved hjælp af en korrekt linjetegning.
(Vitruv, 2016, s. 342)

Som eksempel giver Vitruv et område, der har sidelængden 10 fod og dermed et areal på 100 kvadratfod, og man ønsker et nyt kvadrat med det dobbelte areal. Det kan iflg. Vitruv ikke løses ”aritmetisk” – for hvis man tager sidelængden 14, bliver kvadratets areal 196, og tager man 15, bliver det 225. I stedet må man gøre det geometrisk – ved at trække diagonalen i det oprindelige kvadrat og bruge den som sidelængde i det nye kvadrat. Vi får også et argument for, at det er den rigtige løsning: da diagonalen deler kvadratet i to lige store trekanter med et areal på 50 kvadratfod, og det nye kvadrat består af fire af disse trekanter, er det den rigtige løsning. Når Vitruv skriver, at problemet ikke kan løses aritmetisk, handler det om, at siden og diagonalen i kvadratet er inkommensurable. Med andre ord vil længden af diagonalen blive et irrationalt tal. Det vil kræve en tilnærmelse, hvis man vil regne sig frem til længden. Hvis man derimod konstruerer løsningen, kan man finde frem til det præcise linjestykke, man er ude efter. Vitruvs eksempel bygger på Platons dialog *Menon*, hvor Sokrates får en slave til at konstruere et kvadrat, der har det dobbelte areal af et kvadrat med en sidelængde på to fod. Sammenhængen er dog en anden hos Platon, hvor han bruger det til at vise, at det at lære i virkeligheden drejer sig om at generindre. Man kan fx finde dialogen i (Glunk, 2006).

Det næste eksempel drejer sig om Pythagoras, som har vist, hvorledes man kan lave en ret vinkel uden at bruge ”kunstgreb”. Vitruv beskriver, hvordan man kan gøre dette ved hjælp af en 3–4–5–trekant. Man skulle endda kunne bruge dette til at lave en trappe med den rette hældning ved at dele etagehøjden i tre dele, lave vangerne, så de er fem af disse dele, og anbringe den nederste del af vangerne fire dele væk. Jeg tror dog, det vil give en lidt stejl trappe.

Vitruv fortæller dernest den meget berømte historie om Archimedes, der skulle undersøge om en guldkrans bestod af rent guld, eller om der var blevet snydt, og en del af guldet var blevet skiftet ud med sølv. Archimedes opdagede løsningen, da han var på badeanstalt og sænkede sig ned i et badekar fyldt med vand, og han lagde mærke til at den mængde, der flød over, svarede til den del af hans krop, der var sænket ned i vandet. Det kunne han udnytte ved at sænke guldkronen ned i et kar fyldt med vand, og se om den fortrængte lige så meget vand som et lod af rent guld med samme vægt. Det var denne opdagelse, der skulle have fået Archimedes til at løbe nøgen gennem byen og råbe *heureka*.

Endelig fortæller Vitruv om Archytas af Tarent og Eratosthenes af Kyrene, som begge har gjort store opdagelser, men især er kendt for deres løsning af terningens fordobling – det såkaldte deliske problem. Dette problem kan ikke løses med passer og lineal, men man bliver nødt til at tage andre hjælpemidler i brug – problemet kan oversættes til at konstruere to mellemproportionaler (givet a og b, find to mellemproportionaler x og y så $\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y}$, hvis $b = 2a$, vil x være en løning på problemet). Archytas løste dette problem ved at finde skæringen mellem en cylinder, en torus og en kegle. Eratosthenes benyttede sig derimod af mesolabiet, som er en mekanisk konstruktion, hvor man kan forskyde retvinklede trekanter i forhold til hinanden, og dermed finde de to mellemproportionaler.

Afslutning

Jeg håber, denne artikel har givet jer et indblik i Vitruvs *Om Arkitektur* – og ikke mindst hvorfor man kan være interesseret i at læse den som matematiklærer. Jeg ved godt, at der stadig er et stykke arbejde i at få omsat eksemplerne fra *Om Arkitektur* til konkret undervisning, men jeg håber, at jeg har givet en idé til, hvor man kan begynde. Jeg tror især *Om Arkitektur* kan give nogle gode muligheder for samarbejde mellem matematik og billedkunst, historie eller oldtidskundskab.

Litteratur

Andersen, Kirsti og Mikkel Vestergaard Laursen (sep. 2011). *“Ikke alle skæringer er gyldne. En udbredt misforståelse om anvendelse af det gyldne snit før anden halvdel af 1800-tallet”*. LMFK-bladet, bd. 33, nr. 4, s. 21, 24–25.

Cuomo, Serafina (2001). *Ancient Mathematics*. Sciences of Antiquity. London og New York: Routledge.

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (2016). *Herons formel. Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter.* København: Matematiklærerforeningen.

Euklid (1912). *Euklids Elementer VII - IX*. Oversat af Thyra Eibe. København: Nordisk Forlag.

Glunk, Claus m.fl. (2006). *Q. E. D. Platon og Euklid tegner og fortæller*. København: Gyldendal.

Grøn, Bjørn. m.fl. (2016). *Hvad er matematik? OG KULTURFAG! (C)*. København: L&R Uddannelse.

Heath, Thomas L. (1896/1961). *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections.* Edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject. Cambridge: W. Heffer.

Vitruv (2016). *Om Arkitektur.* Udg. af Jacob Isager. Oversat og kommenteret af Karen Dreyer Jørgensen m.fl. University of Southern Denmark Classical Studies 25. Odense: Syddansk Universitetsforlag.