Kildecentreret matematikhistorie: Herons formel

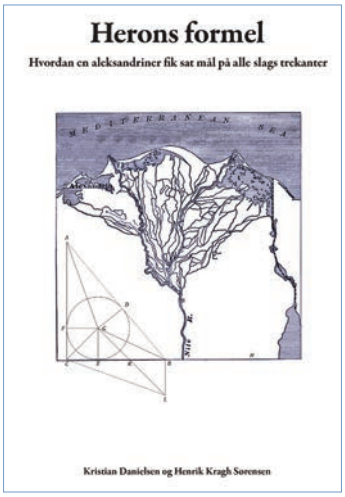
Kristian Danielsen, ekstern lektor, Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet og
Henrik Kragh Sørensen, professor (mso), Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Herons formel for udregning af en trekants areal ud fra dens sider,

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

har en lidt mærkelig rolle i matematikundervisningen på STX: Den er ikke en del af kernestoffet, og man finder sjældent beviser for den i lærebøgerne, men de fleste elever kender den fra folkeskolen eller har fundet den i en formelsamling og bruger den, når de løser opgaver. Samtidig er det et stykke matematik, der fascinerer mange matematiklærere – hvis man kigger sine gamle LMFK–blade igennem, kan man finde mange forskellige beviser for Herons formel.

Det er også et stykke matematik med en lang og interessant historie. Formlen er opkaldt efter den aleksandrinske matematiker Heron, der levede i det første århundrede efter Kristi fødsel. Man finder "formlen" i Herons værk *Metrica*, hvor den er formuleret og bevist som en geometrisk sætning: Hvis en trekants sider er kendte, så er arealet også kendt. Selvom græsk matematik var baseret på konstruktioner og ikke på formler, viste Heron alligevel også, hvordan man kunne beregne en trekants areal ud fra dens sider vha. to taleksempler. Siden Heron er formlen blevet reformuleret og genbevist flere gange i takt med, at notation og teori har udviklet sig. Der findes således algebraiske og trigonometriske beviser for Herons formel, og så berømt en matematiker som Isaac Newton har genbevist den.



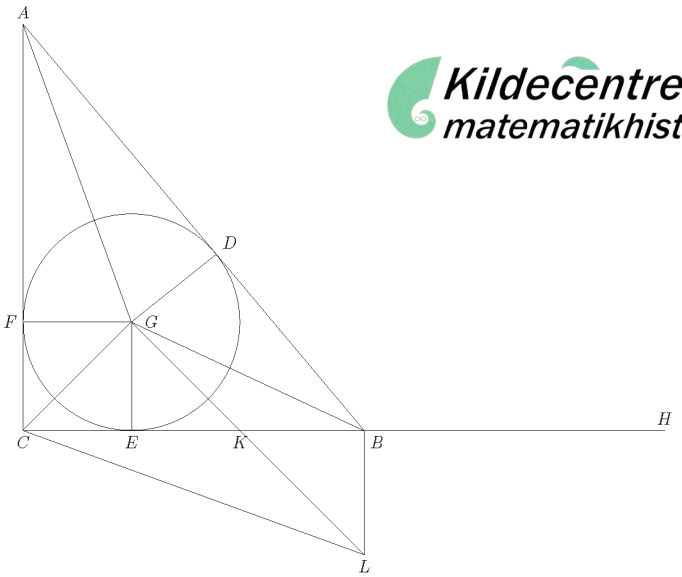
Dette har fået os til at se nærmere på Herons formel ud fra en kildecentreret tilgang. Vi har valgt at tage udgangspunkt i Herons eget bevis, som har vist sig, at give mulighed for flere spændende indsigter i matematik. Arbejdet er mundet ud i hæftet *Herons formel — Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter – Kildecentreret matematikhistorie på STX*, som netop er udkommet på Matematiklærerforeningens Bogsalg. Hæftet er stilet mod alle matematiklærere på STX og lægger op til forskellige former for inddragelse af kildecentreret matematikhistorie i undervisningen. I Herons bevis argumenteres ud fra en geometrisk konstruktion, som er baseret på den indskrevne cirkel i den givne trekant (se figuren nederst på siden). Ud fra denne konstrueres nogle hjælpepunkter, og selve beviset er en øvelse i argumenter om ensvinklede trekanter krydret med nogle argumenter om forhold, som vi i dag er vant til at behandle med algebraisk notation.

Kildecentreret matematikhistorie

Hæftet har den samme opbygning som vores tidligere materiale *Vækst i nationens tjeneste – Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst: En autentisk og god (matematik)historie på STX* fra 2014. Det centrale er den originale kilde, som vi har oversat fra græsk. Kilden bliver udfoldet i stor detalje vha. kommentarer, figurer og opgaver. Desuden bliver den sat ind i en historisk, matematisk og videnskabsteoretisk sammenhæng, og der er forslag til forskellige undervisningsforløb.

Undervejs foreslår vi opgaver til at understøtte elevernes udforskning af kilden og dens matematik. Vi arbejder med forskellige opgavetyper, som på den ene side forbinder kildens matematik med noget, eleverne kender i forvejen, og på den anden side foreslår forskellige tilgange til at udforske et stykke matematik.

Herons første skridt er som sagt at indskrive en cirkel i den givne trekant. Dette er så oplagt for Heron, at han knap nævner, hvorfor og hvordan det er muligt. Der er her mulighed for at differentiere tilgangen og detaljeringsgraden i at undersøge dette stykke matematik, sådan som vi foreslår i opgave 4.5 (se figuren øverst næste side). Det centrale er i undervisningen at håndtere et stykke græsk matematik, som har været kendt for Heron, men som er fremmed for vore dages elever. Midlerne til denne udforskning kan variere: Man kan lade det stå som en uåbnet sort kasse, man kan bruge mo-



Opgave 4.5 (Indskrivning af en cirkel i en trekant).
I denne opgave skal vi udforske, hvordan man kan indskrive en cirkel i en trekant, sådan at cirklen netop rører alle trekantens sider.

(A) Forklar, hvad sætningen Euklid IV.4 går ud på, og tegn en figur. Hvilke linjer skal man bruge for at fastlægge den indskrevne cirkel?

(B) Konstruér i fx Geogebra en vilkårlig trekant og dens indskrevne cirkel. Variér de givne størrelser indtil du indser, at konstruktionen altid stemmer. Undersøg hvilke størrelser (linjestykker og vinkler) der er ens; brug evt. farver.

(C) På hjemmesiden www.matematikhistorie.dk/herons-formel kan du downloade en dansk oversættelse af EUKLIDS bevis for IV4. Gennemfør EUKLIDS bevis for IV.4 og brug fx internetsiden `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html` til at følge op på de sætninger, definitioner og postulater, som anvendes undervejs.

derne illustrationer i fx GeoGebra, man kan give et argument med moderne notation og begreber, eller man kan gå tilbage til det euklidiske ophav for at følge det klassiske bevis. Valget mellem disse tilgange overlader vi (trygt) til læreren i den konkrete undervisningssituation og de undervisningsmæssige formål, som kilden indgår i.

For at forbinde Herons tour–de–force i ensvinklede trekanter med elevernes forkundskaber har vi foreslået en anden række af opgaver (4.7, 4.8 og 6.4), der gradvist overfører elevernes viden til den konkrete kontekst (se figuren nederst på siden).

Heron og hans formel har vist sig at åbne for meget spændende matematik, som vi mener, kan bruges i undervisningen på STX. Herons formel er ikke direkte en del af kernestoffet, men den ligger meget nær op ad den geometri, der undervises i på STX, og alt efter hvilken måde man griber undervisningen an på, kan den både bruges som matematikhistorisk forløb på 1. år af matematikundervisning – eller senere i matematikforløbet til mere dybdegående spørgsmål. Det bærende princip for materialet er, at det kan anvendes i forskellige undervisningssammenhænge lige fra en kort og motiverende introduktion (ca. 2 moduler), over et længere forløb om konstruktionsgeometri og matematiske beviser, til tværfaglige og kontekstuelle forløb med fx historie og oldtidskundskab om matematikkens rolle og opbygning i græsk og moderne kultur.

Herons formel kan bruges til give eleverne et indblik i græsk konstruktionsgeometri og kan bruges som et supplement til eller erstatning af arbejde med *Euklids Elementer*. Men Heron er en anden type matematiker end Euklid. Hvor *Euklids Elementer* kun er ren matematik, indeholder Herons matematik et helt andet anvendelsesorienteret sigte. For eksempel supplerede Heron som sagt sit bevis med taleeksempler (som man aldrig ser hos Euklid), og Heron beskrev endvidere eksplicit, hvordan man kan anvende matematikken til praktiske formål, fx landmåling. Med Herons formel er det muligt at vise sammenhængen mellem matematik og omverdenen og åbne matematik for samarbejde med andre fag. I det videnskabsteoretiske afsnit lægger vi fokus på matematiske beviser, og vi inddrager en række andre beviser af Herons formel. Dette lægger op til en diskussion af beviset rolle i matematikken og en diskussion af, hvorfor man beviser samme sætning flere gange.

Igennem den mangesidede tilgang og de skitserede undervisningsforløb håber vi, at matematiklærere kan bruge kilden som et forberedt materiale til at belyse mange aspekter af faget og opfylde en række krav fra lærerplanerne samtidig med, at der holdes et højt fagligt fokus.

Til materialet er der en hjemmeside:
matematikhistorie.dk/herons-formel
hvor der er muligt at finde kilden, opgaver og supplerende materiale, der kan printes. Vi vil med tiden også gerne samle eksempler på undervisningsforløb og andre erfaringer med materialet og dele dem via hjemmesiden. Hvis du har spørgsmål, kommentarer, erfaringer, idéer eller ønsker sparing om undervisningsforløb, er du meget velkomne til at kontakte os via email til Henrik Kragh Sørensen <henrik.kragh@ind.ku.dk> eller Kristian Danielsen <kd@css.au.dk>.

Referencer

• Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (2016). *Herons formel. Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter.* København: Matematiklærerforeningen.

• Sørensen, Henrik Kragh (nov. 2016). *Herons formel i matematikhistorisk lys.* Video: SCIENCE foredrag. URL: video.ku.dk/herons-formel-i-matematikhistorisk-lys

Opgave 4.7 (Ensvinklede trekanter).
Hvis trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede, dvs $A = A_1$, $B = B_1$ og $C = C_1$, da er $a_1/a = b_1/b = c_1/c = k$ eller $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$.
k kaldes forstørrelsesfaktoren eller skalafaktoren.
Vis at $a_1/b_1 = a/b$, $a_1/c_1 = a/c$, $b_1/c_1 = b/c$ (de reciprokke versioner gælder selvfølgelig også).

Opgave 4.8 (Ensvinklede trekanter og retvinklede trekanter).
Lad ABC være en retvinklet trekant med vinklen C ret. Tegn h_c (altså højden nedfældet fra vinklen C). Kald h_c's skæring med c for D.
Betragt trekanterne ABC, ACD og CBD. Vis at de tre trekanter er ensvinklede. (Det kan være en god idé at lave nye figurer, hvor trekanterne ikke ligger oven i hinanden, men er placeret ved siden af hinanden). Hvilke stykker svarer til hinanden i de tre trekanter?

Opgave 6.4 (Argumenter om ensvinklede trekanter).
To af de springende punkter i HERON FRA ALEXANDRIAS (ca. 10 e.v.t–ca. 70 e.v.t.) bevis består i at vise den sidste lighed i $\frac{CB}{BH} = \frac{BL}{EG} = \frac{BK}{KE}$ og i at udlede $\square CEK = EG^2$. I begge tilfælde argumenterer HERON ud fra ensvinklede trekanter.

1. Tegn en skitse med punkterne B, E, G, L. Hvad ved du forudgående om de indgående linjer og vinkler? Hvilke trekanter er ensvinklede? Hvordan når man frem til den ønskede sammenhæng mellem forhold?

2. Tegn en skitse med punkterne C, E, G, K. Hvad ved du forudgående om de indgående linjer og vinkler? Hvilke trekanter er ensvinklede? Hvordan når man frem til den ønskede sammenhæng mellem forhold?